

La cicloide: un recorregut històric i matemàtic

Projecte d'Aprenentatge i Servei del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) i la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona (UB)

Autoria: Gemma Ramírez Pruñonosa

Tutoria: Sergi Muria (UB), Pura Fornals i Guido Ramellini (MMACA)

ABSTRACT

En aquest article es realitza un extens estudi de la cicloide. Es desenvolupa un repàs històric sobre els matemàtics que van estudiar aquesta corba i es mostren algunes de les contribucions que van realitzar amb les eines matemàtiques de l'època. Alhora, s'estudia la corba amb els coneixements matemàtics actuals. Des d'aquestes dues òptiques, es presenten les propietats geomètriques i físiques de la cicloide més rellevants.

En algunes de les seccions s'exposen prèviament definicions i teoremes necessaris per poder arribar a determinats resultats d'aquesta corba.

Finalment, es relaciona aquesta corba amb d'altres relacionades que també són presents al MMACA, com les epicloides o hipocicloides.



Figura 1. El mòdul de la cicloide del MMACA

ÍNDEX

1	Introducció	1
1.1	Motivació del mòdul	1
1.1.1	Primera aproximació: longitud, àrea i evoluta	1
1.1.2	Aproximacions a les propietats físiques	3
2	Context històric	5
2.1	Fins la primera part del segle XVII	5
2.2	Segona part del segle XVII cap endavant	7
3	Aportacions històriques	8
3.1	El càlcul de la recta tangent	8
3.2	El càlcul de la recta normal	10
3.3	El càlcul de l'evoluta	10
3.4	El càlcul de l'àrea	11
3.5	La propietat tautòcrons	12
3.5.1	El pèndol isocrònic	12
3.6	La braquistòcrons	15
4	Amb eines matemàtiques actuals	19
4.1	Definicions prèvies	19
4.2	La cicloide	20
4.2.1	Equacions paramètriques	20
4.2.2	La longitud i l'àrea	21
4.3	El càlcul de la recta tangent i la recta normal	22
4.4	El càlcul de l'evoluta	23
4.4.1	El pèndol isocrònic: longitud	27
4.5	La braquistòcrons	28
4.5.1	El càlcul de variacions	31

5	Corbes relacionades amb la cicloide	34
5.0.1	Trocoides	34
5.0.2	Epicycloides i hipocicloides	34

1 INTRODUCCIÓ

1.1 MOTIVACIÓ DEL MÒDUL

Emma Castelnuovo, matemàtica i pedagoga italiana, conjuntament amb Mario Barra en el llibre *Matematica nella realtà*, [1] introdueix l'estudi de la cicloide amb la següent pregunta:

US HEU PREGUNTAT MAI QUINA CORBA DESCRIU UNA VÀLVULA DE RODA D'UNA BICICLETA?

Es refereix a la corba que descriu un punt fix d'una circumferència quan aquesta gira sobre una línia recta. Aquesta s'anomena **cicloide**, i té unes propietats molt sorprenents. L'estudi d'aquesta corba ha interessat a nombrosos matemàtics al llarg de la història d'aquesta disciplina, fet que analitzarem seguidament.

Calcularem la longitud i l'àrea d'un arc de cicloide, així com també n'estudiarem les seves propietats geomètriques: el càlcul de la recta tangent, la recta normal i l'evoluta. Veurem també les seves propietats físiques més rellevants: la propietat tautòcrona i braquistòcrona. Aquest estudi el farem a través dels ulls de grans matemàtics així com també farem un anàlisi més acadèmic d'aquesta corba.

En [aquest enllaç de geogebra](#) podem observar la construcció de la cicloide.

1.1.1 Primera aproximació: longitud, àrea i evoluta

Per començar, volem acostar-nos a aquesta corba d'una manera intuïtiva, i ens sembla una bona manera fer-ho a través de l'estudi que va fer Emma Castelnuovo al seu llibre *Matematica nella realtà* l'any 1976. Aquest llibre és fruit d'una Exposició de Matemàtiques que va realitzar la Scuola Meadia Tasso de Roma l'any 1974. L'exposició tenia diversos panells on hi havia la feina feta per l'alumnat al llarg del curs, i el material utilitzat per al desenvolupament dels diversos temes. Es pretenia vincular l'alumnat amb la matemàtica més concreta, propera i quotidiana, per tal de connectar-lo amb la mateixa essència que havia portat a la persona creadora matemàtica als respectius descobriments d'aquesta disciplina. Un dels capítols del llibre està dedicat a la cicloide. Es va construir un mecanisme que permetia comprovar que la longitud d'un arc de cicloide és 8 vegades el radi del cercle generador, i l'àrea sota un arc de cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador. Veiem-ho:

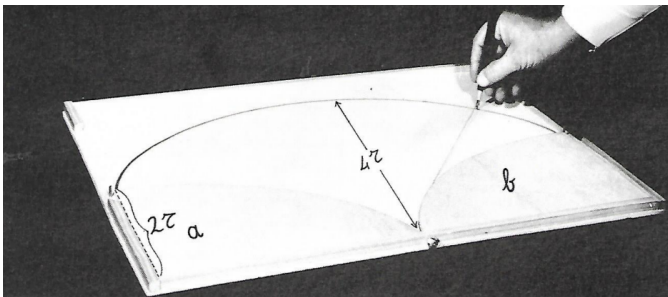


Figura 2. Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: càlcul de la longitud d'un arc de cicloide

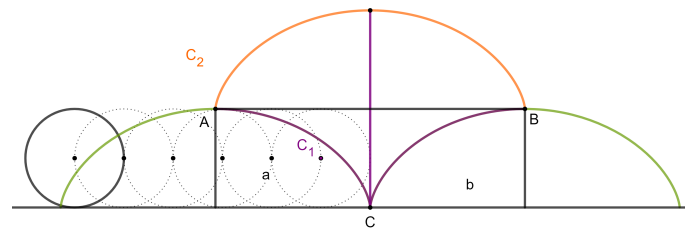


Figura 3. Reproducció del raonament al GeoGebra

Signin a , b les dues meitats de la primera cicloide construïda. Tenim una corda que inicialment ressegueix el perfil de la primera meitat (a), i que té els extrems en A i C . Imaginem-nos que l'extrem de la corda que toca A té tinta. Si mantenim tensa la corda i ens allunyem de A , construïm una nova corda: una cicloide.

Desplacem la corda fins que aquesta sigui recta, és a dir, fins que C s'uneixi amb el punt més alt d'aquesta nova

corba. En aquest punt, la corda ha dibuixat la meitat de la corba. La longitud de la corda és $4r$: notem que tenim $2r$ de la primera circumferència generatriu i $2r$ de la segona. Per tant, quan dibuixi la corba sencera, haurà resseguit $2 \times 4r = 8r$. **La longitud d'un arc de cicloide és, doncs, $8r$.**

Presentem dos conceptes: l'evolvent (o involuta) i l'evoluta d'una corba. Imaginem-nos que tenim una corba (C_1) amb un cordill embolicat al seu voltant. Si anem desplegant el cordill mantenint-lo tangent a aquesta, l'extrem del cordill descriu l'evolvent C_2 . És a dir, l'evolvent d'una corba C_1 és una altra corba C_2 tal que les seves rectes normals són tangents a la C_1 . El concepte complementari a l'evolvent és l'evoluta: Imaginem-nos una corba C_2 i la família de rectes normals a aquesta. L'evoluta d'aquesta corba és una corba C_1 tal que les seves tangents són les normals de la corba C_2 .

Amb aquest mateix artefacte podem visualitzar una altra propietat de la cicloide: Si estudiem la corda en diverses posicions, és a dir, si el despleguem mantenint-lo tangent a C_1 , la corba resultant és C_2 , la seva evolvent. Alhora, les rectes normals a C_2 són tangents a C_1 , i per tant aquesta és l'evoluta de la primera. **L'evoluta i l'evolvent de la cicloide, doncs, coincideixen.**

En [aquest enllaç de geogebra](#), realitzat per Manel Udina (membre del MMACA), pot observar-se la construcció de l'evoluta.

Emma Castelnuovo va dissenyar un aparell per obtenir una nova demostració del càlcul de l'àrea de la cicloide. Es tenen uns tubs "corredissos" que llisquen entre el cercle i la cicloide.

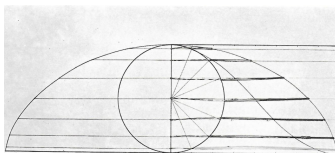


Figura 4. Imatge extreta de *Matematica nella realtà*

Per calcular l'àrea sota un arc de cicloide, l'autora raona de la següent manera:

Es vol determinar l'àrea de la part de la dreta. El primer pas és calcular la llargada d'alguns segments paral·lels a la base.

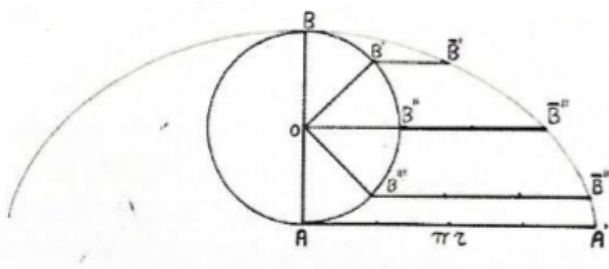


Figura 5. Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: raonament del càlcul de l'àrea

Notem que amb una rotació d' $\frac{1}{4}$ de l'angle, B va a B' . Al mateix temps, el cercle ha avançat: B s'ha desplaçat fins a $\overline{B'}$.

De forma general, amb una rotació de 180° B arriba a A' , i notem que la longitud de AA' és equivalent a la de la semicircumferència, és a dir, πr .

En el cas del primer segment, amb una rotació de $\frac{180^\circ}{4}$, B' avança una longitud de $\frac{AA'}{4} = \frac{\pi r}{4}$ i arriba a $\overline{B'}$.

De forma anàloga, amb una rotació de $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ i $\frac{3 \cdot 180}{4} = 135^\circ$ B es desplaça a B'' i B''' i avança una longitud de $\frac{AA'}{2} = \frac{\pi r}{2}$ i $\frac{3AA'}{4} = \frac{3}{4}\pi r$, respectivament.

Emma nota que s'ha realitzat aquest exercici amb 4 segments però que es pot fer amb tants com es vulguin. Recordem que l'aparell està format de tubs corredissos, i que podem desplaçar els tubs dels segments, col·locats entre la part exterior al cercle i la part interior de la cicloide, cap a l'esquerra. Els tubs ara estan a l'interior del cercle, i la nova regió obtinguda (regió Y) és equivalent a la inicial (regió X) a causa del mètode dels indivisibles. Aquest afirma que si dues figures planes estan entremig de rectes paral·leles i les longituds dels segments determinats per la intersecció de qualsevol paral·lela amb aquestes dues figures són iguals, les figures tenen la mateixa àrea. S'observa que la suma

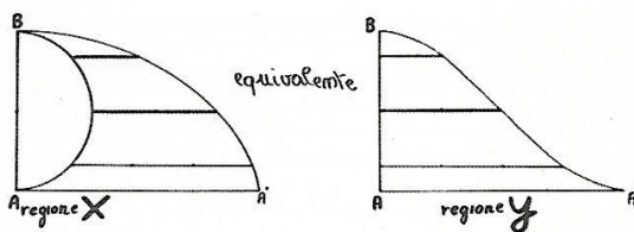


Figura 6. Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: les àrees són equivalents

del segment superior de la regió X i el segment inferior de la regió Y és πr , com també ho és la suma del segment inferior de X amb el segment superior de Y, i la suma dels segments del mig. Per tant, si fem rotar la figura Y obtenim un rectangle de base πr i d'alçada $2r$, d'àrea doncs $2\pi r^2$.

Per tant, l'àrea de la cicloide és:

$$Area_x + Area_y + Area_{\bigcirc} = 3\pi r^2$$

És a dir, l'àrea de la cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador.

A la secció (4.2.2) es poden veure aquests resultats amb eines de càlcul. El raonament del càlcul de l'àrea d'Emma Castelnovo és una adaptació del mètode que va usar Gilles Personne de Roberval, que també es presenta més endavant.

1.1.2 Aproximacions a les propietats físiques

Un cop calculada l'àrea i la longitud d'un arc de cicloide i coneguda la seva evoluta, prosseguim a aproximar-nos més a aquesta corba a través de les sorprenents propietats físiques que compleix.

QUINA FORMA HA DE TENIR UN TOBOGAN PER ARRIBAR A BAIX DE EL MÉS AVIAT POSSIBLE?

Aquesta pregunta es pot llegir des d'una òptica matemàtica així: Suposem que un cos només es regeix per l'acció de la gravetat, volem trobar el recorregut per anar de A fins a B tal que el temps sigui mínim. Aquesta propietat s'anomena braquistòcrona. Quina és la corba que ho compleix? Aquest plantejament, anomenat "el problema de la braquistòcrona", ha estat estudiat per considerables matemàtics al llarg de la història. A primera vista, pot semblar que el camí que garanteix el mínim temps de descens és el camí de mínima longitud, és a dir, la recta. Galileo Galilei va conjecturar que l'arc de circumferència era la solució. Durant el segle XVII, personatges com ara els germans

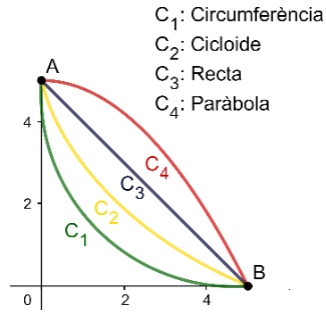


Figura 7. Possibles respostes a la pregunta

Jakob i Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz i Isaac Newton, van seguir estudiant el problema.

En aquest article veurem que **la corba braquistòcrona és la cicloide**. De fet, aquesta propietat es pot experimentar de forma manipulativa al mòdul de la cicloide del MMACA, on es deixen anar dues pilotes a la vegada des del punt més alt d'una cicloide invertida i d'una recta i es comprova que el recorregut de la primera és més ràpid.

QUINA BOLA ARRIBARÀ ABANS AL PUNT MÉS BAIX D'AQUEST SEMIARC DE CICLOIDE?

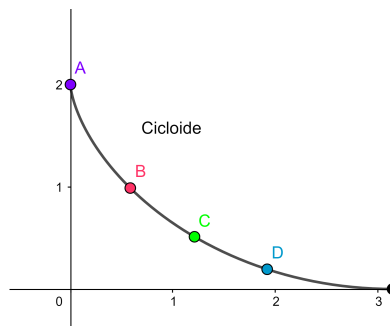


Figura 8. Possibles respostes a la pregunta

De forma intuïtiva podem pensar que l'ordre d'arribada al punt més baix (el negre) serà D, C, B, A; ja que D és la bola més propera al punt negre i A la més llunyana, estant C i B entremig.

Aquesta afirmació és certa per a moltes corbes però no per a la cicloide: **La cicloide compleix la propietat tautòcrona**, és a dir, el temps de descens al llarg de la corba és independent a la posició inicial. Aquesta propietat també s'experimenta al mòdul del MMACA: es col·loquen les dues pilotes a diferents punts de la cicloide i es comprova que el temps d'arribada al punt central és el mateix.

En [aquest enllaç de geogebra](#) podem observar la propietat tautòcrona de la cicloide de forma dinàmica.

Christiaan Huygens va estudiar aquesta propietat amb deteniment a través d'una necessitat que tenia: trobar un pèndol tal que el període fos independent de l'amplitud. Huygens va descobrir que si la trajectòria que seguia el pèndol era cicloidal, aquesta propietat es complia.

De fet, al museu de matemàtiques *Il Giardino Di Archimede*, situat a Florència (Itàlia) hi ha un mòdul dedicat al pèndol de Huygens. En aquest es comparen dos pèndols: el de l'esquerra és un pèndol simple, que realitza una trajectòria circular, i el de la dreta un pèndol cicloidal, que realitza una trajectòria cicloidal. Hi ha dues cèl·lules fotoelèctriques que mesuren els respectius períodes, que es mostren a la pantalla. Tan bon punt els pèndols comencen a oscil·lar, es veu com el període del pèndol simple decreix amb les amplituds de les oscil·lacions, així com el del cicloidal es manté constant.



Figura 9. El mòdul: “Pèndol cicloidal”

2 CONTEXT HISTÒRIC

Com bé ja hem esmentat, la cicloide és una corba àmpliament coneguda per les seves diverses propietats i per haver estat motiu d’investigació i de disputa entre els matemàtics europeus del segle XVII. Det fet, aquesta corba també es coneix com *l’Helena de la Geometria*, fent referència al personatge mitològic grec Hèlena de Troia. Seguidament en farem un breu repàs històric. [4] [5]

2.1 FINS LA PRIMERA PART DEL SEGLE XVII

Hi ha diversos matemàtics als quals se’ls associa els estudis inicials de la cicloide, tot i no existir una evidència explícita. A finals de segle XVII, John Wallis otorga l’autoria a Nicolas Cusanus datant-la l’any 1450, i també menciona que Charles de Bouelles havia estudiat la corba cap l’any 1500. Pel que fa a Cusanus, els historiadors estan d’acord en afirmar que Wallis es va equivocar otorgant-li l’autoria, a menys que Wallis tingués accés a algun manuscrit inexistent a dia d’avui. En relació a Bouelles, sembla que va usar una corba generada per un punt fix en una circumferència amb voluntat d’estudiar la quadratura del cercle, en la seva publicació *Introductio in geometriam* l’any 1503.

La història comença a ser més clara amb Galileu Galilei. Gairebé un segle i mig més tard, aquest enviava una carta a Bonaventura Cavalieri, compartint que havia estat treballant en aquesta corba durant més de 50 anys. La carta data del 24 de febrer de l’any 1640 i diu així:

“Quella linea arcuata sono più di cinquanta anni che mi venne in mente di descriverla, e l’ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che la descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta.”

“Aquella línia arquejada fa més de cinquanta anys que em va venir en ment descriure-la, i la vaig admirar per una corbatura suau per adaptar-la als arcs d’un pont. Vaig fer sobre seu, i sobre l’espai entre si mateixa i la seva corda, vàries proves per demostrar-ne alguna passió, i des del principi em va semblar que aquest espai pogués ser el triple del cercle que la descriu; però no va ser així, tot i que la diferència no sigui massa.” [1]

Va ser Galileu qui la va nombrar i popularitzar, i també va intentar realitzar la seva quadratura (3.4) (és a dir, el

càlcul de l'àrea) l'any 1599, tal i com podem veure a la carta i també pel que diu una publicació de l'any 1644 del seu alumne Evangelista Torricelli (*Opera Geometrica* - 1644).

A principis del segle XVII, el Pare Marin Mersenne va interessar-se per la corba. L'any 1628 aquest va encoratjar a Gilles Persone de Roberval a trobar la quadratura de la cicloide, fet que va aconseguir sis anys més tard. La quadratura de Roberval es basa en el Principi de Cavalieri i en el desenvolupament d'una nova corba, anomenada la corba companya de la cicloide. Roberval va descobrir que **l'àrea delimitada per la cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador**. (3.4)

A principis de l'any 1638, Mersenne va escriure a Pierre de Fermat i a René Descartes (3.1) i els va proposar que construïssin una tangent a la corba, i Roberval també va entrar en joc (3.1). A l'agost d'aquell mateix any, Mersenne va rebre tres maneres diferents de dibuixar la tangent a la cicloide. Va haver-hi bastanta disputa sobre els mèrits del descobriment ja que en aquella època la definició de la tangent com a “posició límit de rectes secants” encara no estava consensuada.

Mersenne va anunciar aquests resultats a Galileu, que els va fer arribar als seus alumnes Torricelli i Vincenzo Viviani. El primer va mostrar un gran interès i l'any 1644, en un apèndix al seu llibre *Opera Geometrica* va fer pública la seva quadratura i el seu mètode de dibuixar la tangent. Roberval el va acusar públicament de plagi, tot i que actualment se sap que ambdós van realitzar els seus descobriments de forma independent l'un de l'altre.

El següent episodi al voltant d'aquesta corba es centra en Blaise Pascal. Aquest havia deixat les matemàtiques en segon pla per dedicar-se a la teologia. Tot i així, va ser durant una nit de 1658 que tenia molt mal de queixal que va estar rumiant sobre aquesta corba. El dolor va cessar i Pascal va interpretar-ho com un senyal diví. Com a conseqüència, va estar-se vuit dies seguits estudiant la cicloide i les seves propietats geomètriques. Després d'això, l'any 1658, Pascal va publicar dos reptes al voltant de la cicloide oferint una recompensa per a qui els resolgués. Els reptes deien així:

- Determinar l'àrea i el centre de gravetat de l'arc de cicloide damunt una línia paral·lela a la base.
- Determinar el volum i el centre de gravetat del volum generat quan l'àrea tancada gira al voltant de la seva base i l'eix de simetria.
- Determinar el centre de gravetat del sòlid generat quan cada cos es talla per un pla paral·lel al seu eix de revolució.

Només dos matemàtics van respondre al repte: John Wallis i Antoine de Lalouère. Ambdues propostes van tenir bastants errors i per tant no van triomfar.

Paral·lelament, Christopher Wren va enviar a Pascal la seva proposta de rectificació de la cicloide, és a dir, trobar una línia recta equivalent en longitud d'arc a una corba. Fins l'any 1650, aquest problema era irresoluble per a molts matemàtics. Tot i així, Wren havia assegurat que **la longitud de l'arc de cicloide era exactament vuit vegades el radi del cercle generador**, sense proporcionar cap demostració. Roberval insistia en l'autoria de la descoberta. Tot i així, s'atribueix a Wren el mèrit de la primera publicació i la seva respectiva demostració, publicada per Wallis en el seu *Tractatus Duo* l'any 1659. Pascal també va publicar aquell mateix any *L'Histoire de la Roulette*, on compartia els seus estudis de la cicloide.

Amb aquestes dues publicacions, els problemes de quadratura, tangents, rectificacions, curvatura i centres de gravetat estaven substancialment resolts. Mètodes prèvis al càlcul de Newton van ser usats per tots els matemàtics nombrats prèviament que, durant 25 anys, van descobrir resultats importants al voltant d'aquesta corba.

2.2 SEGONA PART DEL SEGLE XVII CAP ENDAVANT

L'any 1657, el matemàtic Christiaan Huygens rumiava com podia fer un rellotge més precís i acurat. Mersenne havia suggerit usar un pèndol com a eina per mesurar el temps, però Huygens sabia que el període d'un pèndol circular depenia de la seva amplitud. Huygens buscava una rellotge de pèndol de manera que el període fos independent de les variacions d'amplitud en les oscil·lacions: necessitava una corba **tautòcrons**, és a dir, una corba tal que el temps que trigués un objecte en arribar al punt més baix d'aquesta, sotmès només a la força de gravetat i sense fregament, fos independent de la posició inicial.

L'any 1658, en el llibre *Horologium*, Huygens explica el seu procés de creació d'un rellotge. Intenta construir-ne un amb claus, una corda i un objecte suspès al final d'aquesta corda. A través de prova i error, Huygens va ser capaç de construir un sistema en el qual el període fos independent de l'amplitud. Va substituir els claus per "plats corbats", i després va realitzar un mètode més senzill on el pèndol es movia realitzant arcs circulars.

Inspirat en Pascal, va percebre que l'objecte suspès en el seu pèndol de plat corbat seguia una cicloide. Per tant, va veure que el període d'un objecte que seguia el camí d'una cicloide invertida era independent a la seva amplitud: comprovava així la propietat tautòcrons de la cicloide (3.5). El 1659, Huygens va estudiar com havia de ser la forma d'aquests plats corbats. A través d'aquest estudi va descobrir una altra propietat remarcable de la cicloide: **l'evoluta d'una cicloide és una cicloide**. Per tant, la forma que havien de tenir aquests plats era la cicloide. Tot i així, a nivell pràctic, a causa de la fricció, el pèndol cicloidal no va tenir èxit. Aquest descobriment els va publicar a *Horologium Oscillatorium* l'any 1673. En aquest llibre estudia profundament la cicloide: calcula la recta tangent (3.1), la recta normal (3.2) i l'evoluta (3.3).

Uns anys més tard, concretament l'any 1696, en *Acta Eruditorum* Johann Bernoulli va presentar el problema de la **braquistòcrons**, tot i que Galileu ja l'havia estudiat anys abans (3.6): Donat dos punts A i B i un mòbil M que només té la força del seu propi pes, quin és el camí més ràpid temporalment per anar de A fins a B? Abans que el problema fos publicat, els germans Jakob i Johann Bernoulli (3.6) i Gottfried Leibniz (3.6) ja tenien la solució al problema: el descens més ràpid es donava amb un arc de cicloide.

El maig de 1697, Johann va fer públic que hi havia quatre matemàtics que havien trobat la solució al problema de la braquistòcrons: Leibniz, el seu germà Bernoulli, Guillaume de L'Hôpital i un altre matemàtic anònim.

El repte formal semblava una invitació explícita a Isaac Newton a causa d'algunes desavinences personals. Diu la llegenda que Newton va rebre el problema una tarda i que el matí següent ja el tenia resolt. Aquest va publicar la seva solució (3.6) de forma anònima a *Philosophical Transactions of the Royal Society*, el gener de 1697. Bernoulli, al veure la resposta, va endevinar que aquesta era de Newton a través de la famosa frase "*tanquam ex ungue leonem*" (*Reconec el lleó per les seves urpes*).

Ambdós germans Bernoulli, moguts per la seva manca de complicitat, es van acusar mútuament de plagi. Tot i així, els mètodes que van utilitzar van ser font d'inspiració per Leonhard Euler, matemàtic que va generalitzar el problema l'any 1744. Euler conjuntament amb Joseph-Louis Lagrange, inspirats en el problema de la braquistòcrons, instaurarien les bases del càlcul de variacions. (4.5.1)

3 APORTACIONS HISTÒRIQUES

3.1 EL CÀLCUL DE LA RECTA TANGENT

Segons Roberval

Plantejament que Roberval va enviar a Mersenne l'any 1638.

És important contextualitzar com entén Roberval la construcció de la cicloide per entendre com descriu la recta tangent. Aquest descriu dos moviments que desemboquen en la cicloide:

Suposem que el diàmetre AD es mou de forma paral·lela a través de AB fins arribar a BO , on AB equival a la semicircumferència. Per altra banda, suposem que el punt A es mou a través del semicercle ACD de tal manera que la velocitat de AD a través de AB és equivalent a la velocitat de A a través del semicercle. Per tant, A arriba al punt D alhora que D arriba a BO . El punt A , doncs, es desplaça amb dos moviments, el propi a través de la semicircumferència i el del diàmetre AD . El camí obtingut és la cicloide demanada.

Per construir una tangent en qualsevol punt P de la cicloide, dibuixem PP' , paral·lel a AB tallant el semicercle en C . Aleshores, dibuixem CF , tangent al semicercle, i tracem PE , paral·lel a CF . La bisectriu de l'angle EPP' és la tangent demanada, ja que és la resultant de dos moviments equivalents. [3]

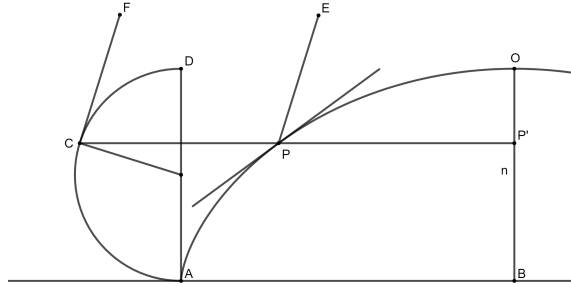


Figura 10. El raonament de Roberval

*Segons Descartes *Plantejament que Descartes va enviar a Mersenne l'any 1638.*

Per tal de dibuixar la tangent en qualsevol punt P de la meitat de l'arc de la cicloide AGD , primer dibuixem PE , paral·lel a la base AC intersecant el cercle en E . Després, dibuixem PQ paral·lel a EC i PH perpendicular a PQ en P . PH és la tangent demanada.

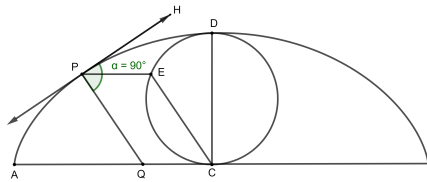


Figura 11. El raonament de Descartes

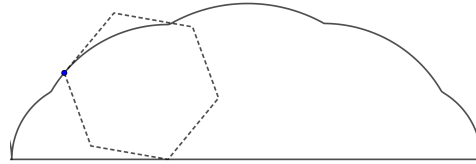


Figura 12. Exemple de l'hexàgon, extrapolable a un polígon de més costats

Descartes va donar la següent justificació: Enlloc d'un cercle lliscant considerem un polígon lliscant, per exemple, l'hexàgon ABCDEF. A mesura que l'hexàgon llisqui a través del pla, el vèrtex A dibuixarà una seqüència d'arcs circulars els centres dels quals estaran als punts B, C', D', etc. Les tangents de cadascun d'aquests arcs seran perpendiculars a la línia que ajunta el punt de tangència amb el centre de l'arc. Descartes va enunciar: El mateix passaria amb un polígon de centenars de milers de milions de costats, i conseqüentment també amb un cercle. La seva construcció determina el punt Q en la figura, la localització del cercle generador a través de la recta que correspon al punt P. [3]

*Segons Huygens *Horologium Oscillatorium* - 1673

Aquests raonaments es basen en proposicions de l'*Horologium Oscillatorium*. En particular, les que concerneixen la tangent són la proposició XIV i XV.[6]

Proposició XIV ABC és una cicloide la base de la qual és AC i l'eix BD. [...] En relació amb l'eix, BCE es descriu a través del cercle, i per qualsevol punt E de la cicloide, EF es dibuixa de forma paral·lela a la base AC, que creua l'eix BD en F i talla la circumferència en G. Es fa notar que la línia recta GE és equivalent a l'arc GB. De forma resumida, Huygens indica que si és E un punt qualsevol de la cicloide, i es traça paral·lela a AD, (que talla la circumferència generatriu en G), aleshores, $EG = \widehat{GB}$.

Això és degut a què $AK = \widehat{EK}$ per la construcció de la cicloide. A més, $\widehat{EK} = \widehat{GD}$. De forma anàloga, $AD = \widehat{DGB}$. Per tant:

$$KD = AD - AK = \widehat{DGB} - \widehat{GD} = \widehat{GB} \quad \text{A més, } KD = EG.$$

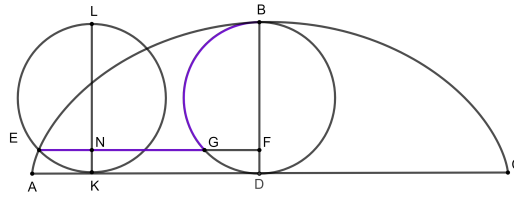


Figura 13. Raonament previ a la construcció de la tangent. Reproducció de la proposició XIV de l'*Horologium*

Fixem-nos ara en la figura 14. El càlcul de la recta tangent es troba en la proposició XV. La tangent a la cicloide en el punt B és la recta pel punt B paral·lela a la recta AE. La recta paral·lela a la base per B talla la circumferència en E. HBN és paral·lel a AE per B. Tracem la paral·lela a la base per H, que talla la cicloide en L, la circumferència generatriu en K i el segment AE en M.

$$KL = \widehat{AK} \quad MK < \widehat{KE} \rightarrow ML = MK + KL < \widehat{KE} + \widehat{AK} = \widehat{AE} = BE = HM.$$

Com que $ML < MH$, H és exterior a la cicloide, i el raonament és semblant per a N: Es traça la paral·lela a la base per N, que talla la cicloide en Q, el segment AE en P i la circumferència generatriu en O.

$$OQ = \widehat{OA} \quad \widehat{OE} < OP \quad PQ < \widehat{EA} = EB = PN. \text{ Com que } PQ < PN, N \text{ és exterior a la cicloide.}$$

Per tant, si escollim un punt a part de B de HBN serà exterior a la cicloide, i per tant aquesta recta és la seva tangent.

Just després d'acabar aquesta demostració, Huygens remarca que la seva demostració és molt semblant a la de Wren publicada al llibre de Wallis anomenat *Tractatus duo de Cycloide* - 1659. També considera que es pot generalitzar

la proposició per tal que pugui aplicar-e a altres corbes generades a partir de les rotacions de figures.

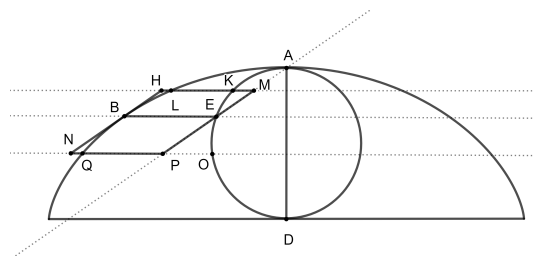


Figura 14. Reproducció de la proposició XV de l' *Horologium*

3.2 EL CÀLCUL DE LA RECTA NORMAL

Segons Huygens *Horologium Oscillatorium* - 1673

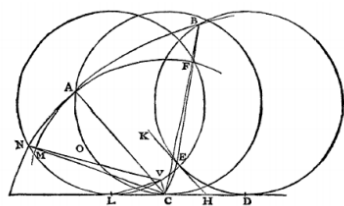


Figura 15. Gràfic de l'*Horologium*.
Obtinguda a [7]

En la mateixa proposició XV, Huygens raona quin és el càlcul per dibuixar la recta normal a la cicloide. En resum, s'uneix el punt de la cicloide al qual es vol traçar la normal amb el punt de contacte de la circumferència generatriu amb l'eix horitzontal. Exposem a continuació un fragment del seu enunciat:

CA creua la corba (*NAB*) amb un angle recte, o la circumferència *MAF* descrita amb centre *C* i radi *CA* toca la corba al punt *A*, i la perpendicular a *AC* dibuixada per *A* és tangent a la corba en aquest punt. Per a més informació, consulteu [7].

3.3 EL CÀLCUL DE L'EVOLUTA

Segons Huygens

Horologium Oscillatorium - 1673

La part III d'aquest llibre estudia les evolutes i la longitud de corbes. És aquí on Huygens fa un extens estudi sobre l'evoluta de la cicloide. A continuació exposem la proposició que exposa que l'evoluta d'una cicloide és una altra cicloide:

Proposició V Si una línia és la tangent a la cicloide al vèrtex, sobre la qual com a base es col·loca una altra cicloide similar i equivalent a la primera, començant pel vèrtex esmentat; qualsevol tangent de la cicloide inferior creua la cicloide superior amb angle recte.

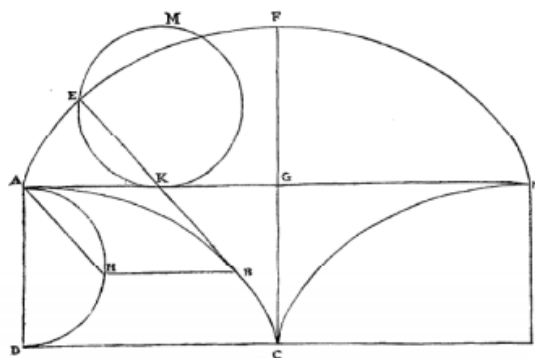


Figura 16. Gràfic de la proposició V. Obtinguda a [8]

És a dir, Huygens dibuixa una cicloide traslladada damunt d'una altra de forma que el vèrtex de la cicloide superior sigui tangent a la cicloide inferior. La circumferència generatriu està desplaçada mig arc. Les rectes tangents a la cicloide inferior coincideixen amb les rectes normals de la cicloide superior.

Per demostrar aquesta proposició, Huygens utilitza les proposicions XIV i XV, que fan referència a la construcció de la recta tangent i la recta normal.

En la proposició VII, Huygens dedueix i demostra que la longitud d'un arc de cicloide és quatre vegades el diàmetre del cercle generador. El raonament matemàtic que ofereix ve acompanyat d'un recorregut històric on assenyalava els diferents personatges que han estudiat la cicloide i quins descobriments han realitzat.

Per a més informació respecte les demostracions de les proposicions precedents, consulteu [8].

3.4 EL CÀLCUL DE L'ÀREA

Aportació de Galileu

L'any 1599 va intentar fer la quadratura d'un arc cicloidal, segons diu Torricelli en una publicació de 1644. Galileu va usar una balança on va posar-hi l'arc cicloidal a una banda i el cercle generador, del mateix material, a l'altra. De forma experimental va descobrir que la relació d'àrees entre l'arc de cicloide i el cercle era 3 : 1. Li va semblar un resultat increïblement senzill, i és per aquest motiu que va decidir abandonar l'experiment, conclouent que la ratio era incommensurable (és a dir, un nombre irracional proper a 3).

La quadratura de Roberval

Traité des Indivisibles - 1693

La proposta de quadratura de Roberval es basa en el Teorema de Cavalieri, que diu el següent: Si dues regions acotades per línies paral·leles són tals que qualsevol línia paral·lela entre elles talla cada regió en segments de mateixa longitud, aleshores les regions tenen la mateixa àrea.

Aquest forma part de la teoria dels *indivisibles*, que va ser un nou mètode per trobar àrees sota corbes. Aquest mètode consistia en la divisió d'una figura corba en franges "infinitament" fines, les àrees de les quals podien ser calculades amb relativa facilitat i després sumades. Aquesta idea va precedir el càlcul integral.

La quadratura de Roberval depèn de l'anomenada corba companya. Aquesta es construeix de la següent manera: [3]

Sigui P qualsevol punt de la cicloide. A través d'una línia paral·lela a AC, dibuixem PQ, congruent a la semicorda EF. La corba companya és el lloc geomètric dels extrems dels segments congruents als de la semicircumferència que tenen un dels vèrtex a la cicloide. De fet, aquesta corba és una corba sinusoidal.

Roberval va demostrar que l'àrea de la regió entre la cicloide i la seva companya era la meitat de l'àrea del cercle generador, o bé $\frac{1}{2}\pi r^2$ (1). Això és degut a la versió bidimensional del principi de Cavalieri, esmentat prèviament: Les àrees són equivalents ja que les tires de les dues regions a les mateixes alçades (la regió interior de la semicircumferència i la regió de la corba companya) són iguals.

Roberval va usar el principi de Cavalieri també per mostrar que la corba companya divideix el rectangle ABDC en

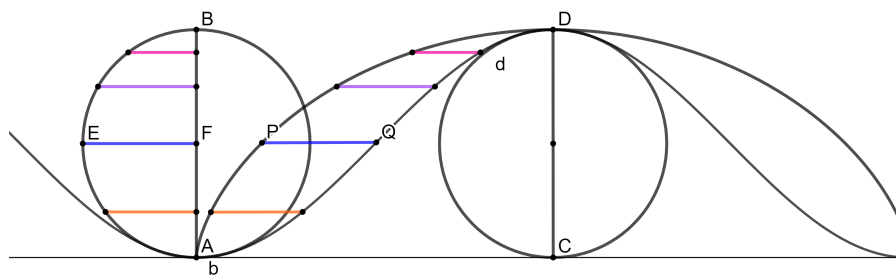


Figura 17. La corba companya de la cicloide

dues parts iguals amb àrees iguals. Això és degut a que per a cada segment MN en la regió de l'esquerra hi ha un segment corresponent i congruent RS a la regió de la dreta. Per tant, l'àrea sota la corba companya és equivalent a la meitat de l'àrea del rectangle, o $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(2\pi r) \times 2r) = \pi r^2$ (2). Notem que $2r$ és el diàmetre de la circumferència i $\frac{1}{2}(2\pi r)$ és la longitud de la trajectòria que fa mitja circumferència, que coincideix amb la base del rectangle.

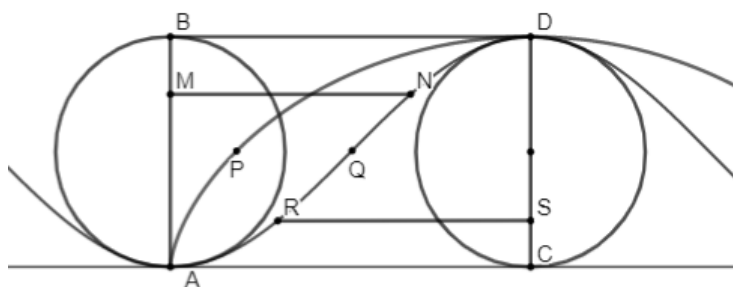


Figura 18. Raonament de Roverbal per al càlcul de l'àrea

Tot plegat, per (1) i per (2) és té que l'àrea sota un arc de cicloide és:

$$2(\text{Area}_{APDR} + \text{Area}_{AQDC}) = 2\left(\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{3}{2}\pi r^2\right) = 3\pi r^2$$

En [aquest enllaç de geogebra](#), realitzat per Manel Udina (membre del MMACA), es pot observar la construcció de la cicloide i de la corba companya.

3.5 LA PROPIETAT TAUTÒCRONA

TAUTÒCRONA O ISÒCRONA.

DEL GREC TAUTO (mateix) o ISO (igual), i CHRONOS (temps).

3.5.1 El pèndol isocrònic

En l'estudi de la mesura del temps, el pèndol ha tingut històricament un paper important. Els primers estudis del pèndol, on es fa palès la seva rellevància, van ser realitzats per Galileu. Aquest va descobrir de forma experimental l'isocronisme del pèndol, va suggerir-ne el seu ús per a la navegació i l'astronomia, i també va ser el primer que

va intentar adaptar aquesta eina als rellotges mecànics.[17] Tot i que moltes de les seves declaracions tenien moltes ambigüitats i algunes d'elles eren incorrectes, Galileu va ser el predecessor del seu estudi més extens, que va entomar Christiaan Huygens.

Huygens va inventar el rellotge de pèndol: en va elaborar la teoria i va construir els primers rellotges d'aquest tipus. La seva obra *Horologium oscillatorium* recull els seus descobriments, alguns dels quals s'han anat presentant al llarg del treball.

Un dels rellotges de pèndol més conegut és el simple. Aquest descriu un arc de circumferència en la seva trajectòria, però té limitacions físiques a causa del fregament de l'aire: les oscil·lacions del pèndol disminueixen i conseqüentment el seu període.

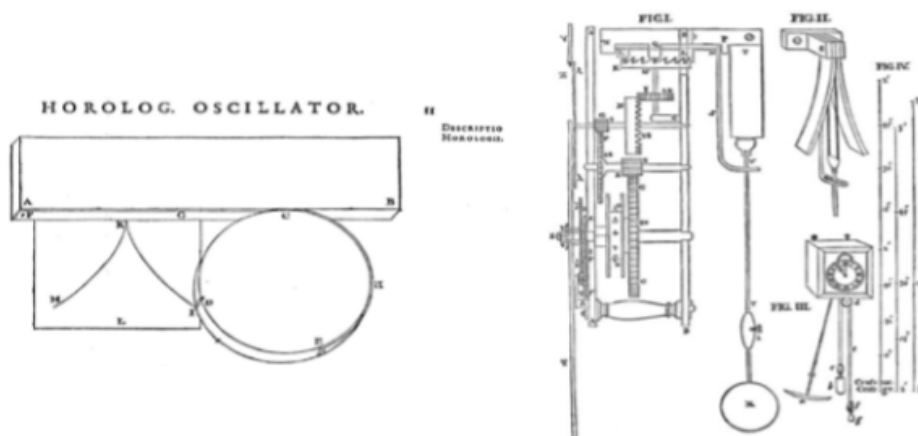


Figura 19. La construcció del pèndol isocrònic a l'*Horologium Oscillatorium*

Huygens va inventar l'accessori (dos contorns sòlids en forma d'arc de cicloide) per tal que les oscil·lacions fossin constants, com bé s'ha explicat a la part històrica. També va descobrir, amb la propietat que l'evolució d'una cicloide és una altra cicloide, que amb una corda de longitud $4r$ (on r és el radi de la circumferència generatriu) la trajectòria que realitza el pèndol és un arc de cicloide.

L'estudi de Huygens

Horologium Oscillatorium - 1673

Tot seguit s'exposen algunes de les proposicions relacionades amb la propietat tautòcrona. La proposició XXIII està relacionada amb la caiguda lliure d'un cos a través d'un arc de cicloide invertida, i desenvolupa una extensa descripció del seu plantejament. De forma resumida, Huygens compara el temps de descens d'un cos a través de la cicloide i de segments fuits de les rectes tangents de diferents punts de la cicloide. Aquesta proposició precedeix les proposicions XXIV a la XXVI, que ofereixen resultats més globals i són els que parlen explícitament de la propietat tautòcrona. [10]

Proposició XXIV Tenim un arc de cicloide invertit ABC , amb eix vertical $\overline{AD}$. Escollim un punt qualsevol B de la corba i dibuixem la recta horitzontal $\overline{BF}$, la semicircumferència FHA i la tangent $\overline{B\Theta}$, que talla la recta horitzontal $\overline{A\Theta}$ en Θ . Sigui $\overline{GE}$ qualsevol línia horitzontal sota $\overline{BF}$, que talla la cicloide en E , la tangent $\overline{B\Theta}$ en I , la semicircumferència FHA en H i l'eix $\overline{AD}$ en G . Sota aquestes condicions, es té el següent resultat: El quocient del temps per anar a través de l'arc $\widehat{BE}$ caient de B , amb el temps per anar a través de la tangent $\overline{B\Theta}$ amb la velocitat que

s'obté d'anar de B a Θ és equivalent al doble del quocient de $\widehat{FH}$ amb $\overline{FG}$.

$$\frac{t_B(\widehat{BE})}{t_{B\Theta}(\overline{BI})} = 2 \frac{\widehat{FH}}{\overline{FG}}$$

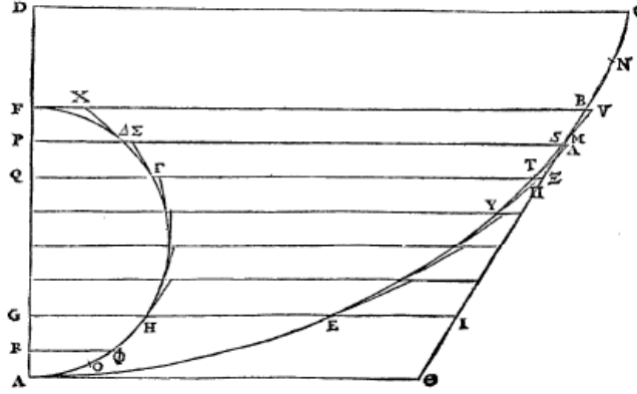


Figura 20. Proposició XXIV de l'Horologium Oscillatorium, obtinguda a [7]

La demostració d'aquest resultat és llarga però interessant des d'un punt de vista històric ja que precedeix les tècniques d'integració de Leibniz i Newton. Per a més informació, consulteu [7].

Aquesta precedeix a la proposició XXV, relacionada relacionada amb la propietat isocrònica de la cicloide. Diu així:

Proposició XXV En una cicloide amb un eix vertical, essent el vèrtex el punt més baix, els temps de descens de cossos des de qualsevol punt, partint del repòs fins que arriben a baix de tot són equivalents. La proporció d'aquest temps respecte el temps de descens de l'eix és proporcional a la semicircumferència respecte el diàmetre.

Com bé s'observa a la figura 21, el vèrtex inferior és A, l'eix vertical és AD i escollim un punt qualsevol de la cicloide, per exemple B. El temps de descens de l'arc $\widehat{BA}$ és equivalent al temps de descens a través de l'eix $\overline{DA}$ com ho és la semicircumferència amb el diàmetre.

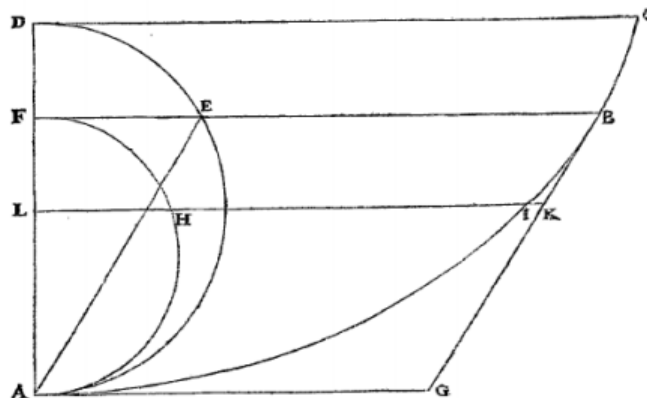
Es descriu un semicercle en l'eix DA, la circumferència de l qual talla $\overline{BF}$ en E, és paral·lel a la base $\overline{DC}$; s'uneix $\overline{EA}$ i es traça $\overline{BG}$, que és tangent a la cicloide en B. La mateixa línia creua la línia dibuixada a través de l'horitzontal que va de A a G: també en FA es dibuixa el semicercle FHA.

Per una banda, per la proposició XXIV, es té:

$$\frac{t_B(\widehat{BA})}{t_{BQ}(\overline{BQ})} = 2 \frac{\widehat{FHA}}{\overline{FA}} = 2 \frac{\pi r}{2r} = \pi$$

Per altra banda, el temps de descens a través de $\overline{BQ}$ és equivalent al temps de descens de $\overline{EA}$, que és paral·lel i equivalent al temps de descens accelerat a través de $\overline{DA}$. Això és degut a la Llei de Cordes de Galileu, exposat a 3.6.

Proposició XXVI Sota les mateixes condicions, si dibuixem una línia HI a sota que talla l'arc BA en I, i la circumferència FHA en H, el temps de passar a través de l'arc BI, al temps de passar l'arc IA després de BI és proporcional a l'arc de circumferència FH a HA.



3.6 LA BRAQUISTÒCRONA

BRAQUISTÒCRONA.

DEL GREC BRACHISTOS (el més curt) I CHRONOS (temps)

Segons Galileu

Galileu va ser el primer que va estudiar el problema de la braquistòcrona: 60 anys abans que Bernoulli ho proposés. Galileu planteja, com es mostra a la figura 22 que si al llarg de l'arc de circumferència fem una corda vertical (AC) i després unim C (cal que C estigui damunt la circumferència) amb l'extrem més baix (B), el temps de descens és menor. Altre cop, si fem AC, CD, DB, el temps de descens és menor. La trajectòria que descriuen aquestes cordes s'aproxima a una circumferència i per tant, ell conclou que el camí més curt de descens és la circumferència. Per Galileu, una circumferència era un polígon amb un nombre infinit de petits costats. Per una banda, realitza aquesta deducció estudiant la trajectòria de descens al llarg de poligonals, i el "límit" de la família de poligonals és un arc de circumferència. Per altra banda, si el temps amb dues cordes és menor que amb una, el temps amb un nombre més elevat de cordes serà, doncs, encara menor.

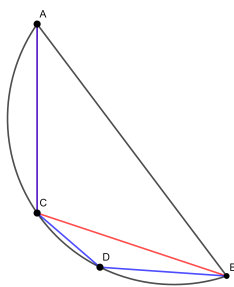


Figura 22. El raonament de Galileu

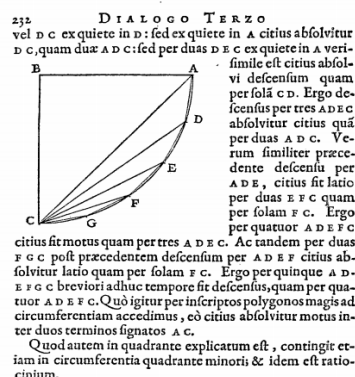


Figura 23. Escolis de la proposició XXXVI. Obtingut de [13]

Un dels temes que Galileu va estudiar a la seva obra *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intoro a due nuove scienze* l'any 1638 va ser els temps de descens de certes corbes. La proposició XXXVI, en el marc del *Dialogo Terzo* demostra el resultat prèviament exposat. Més concretament, en un escolis a aquesta proposició, Galileu intenta demostrar que la manera més ràpida d'anar d'un punt a un altre, connectats per un arc de circumferència, és en si l'arc, i no

la línia recta entre els dos punts. Galileu precedeix l'estudi del càlcul de la braquistòcra. Òbviament, Galileu estava equivocat i certs historiadors matemàtiques [11] associen l'error a assumir per vertaders certes assumpcions no demostrades.

En la Proposició V de *De motu* (1590), demostra que el temps de descens d'un cos en un pla inclinat és proporcional a la llargada del pla, i inversament proporcional a l'arrel quadrada de la seva alçada. Per tant, si T és el temps, L la llargada i H l'alçada, tenim:

$$T = \frac{kL}{\sqrt{H}} \quad (1)$$

on k és una constant de proporcionalitat. A la Proposició VI, Galileu estableix la llei de cordes: [12]

Definim un cercle de diàmetre D que té una corda de llargada L i alçada H . Sigui T el temps de descens al llarg de la corba. Per semblança de triangles,

$$L/H = D/L \rightarrow L^2/H = D.$$

Aleshores, per (1),

$$T = \frac{kL}{\sqrt{H}} = k\sqrt{D}$$

que és una expressió constant, com volíem veure.

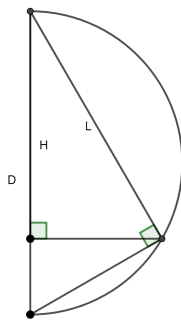


Figura 24. La llei de cordes

Estudiar aquest problema és equivalent a estudiar com cau una partícula per seu propi pes al llarg d'un pla inclinat de longitud L i alçada H . Galileu va trobar l'expressió de forma experimental, i aquest descobriment va permetre a altres matemàtiques seguir investigant les propietats cicloïdals.

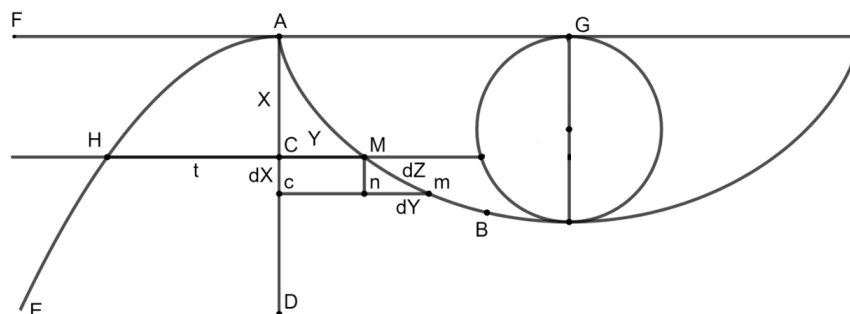
Segons Newton

Acta Eruditorium - 1697

No hi ha cap referència del mètode que va usar Newton per abordar el repte de Bernoulli. Tot i així, es valora que els seus raonaments van ser fonamentalment geomètrics, sense tècniques analítiques. Aquest supòsit es deu al fet que va enviar la seva resposta en aquests termes i també va escriure un teorema estretament relacionat amb el problema de la braquistòcra a la seva obra *Opera Quae Exstant Omnia* (1779-1785). La solució anònima que es va publicar a *Philosophical Transactions of the Royal Society* el gener de 1697, i que mesos més tard va exposar-se a *Acta Eruditorium* mostra la manera de construir una cicloïde unint dos punts qualsevol. Hi va incloure el dibuix de la Figura 24 i prossegueix de la següent manera: [14]

Segons Johann Bernoulli

Seguidament es mostra una traducció d'una part de la demostració que va oferir Johann Bernoulli a *Acta Eruditorum*. Segui FGD el medi, delimitat per l'horitzontal FG ; A el punt de propagació; AD la vertical; AHE , l'eix



de la corba donada, tal que HC es troba en el medi amb profunditat AC , o la velocitat del raig de llum o de la partícula en M , i AMB el camí buscat. Sigui x la distància per AC ; t per HC ; y per CM ; dx pel diferencial Cc ; dy pel nm ; dz pel Mm ; i a per una constant arbitrària. L'arc $\widehat{Mm}$ representa el raig de llum corbat; mn el sinus de l'angle de refracció, és a dir, la inclinació de la corba mesurada des de la vertical. Amb tot això, mn és directament proporcional a Hc , per tant $\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a}$, fet que implica l'equació $ady = t dz$ o bé $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$, que dona l'equació diferencial general $dy = t \frac{dx}{\sqrt{aa - tt}}$ per la corba buscada.

Sota la hipòtesi de Galileu, Bernoulli prossegueix: La corba donada AHE és una paràbola, això és. $tt = ax$ i $t = \sqrt{ax}$, que si ho substituïm a l'equació general obtenim $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, pel qual concloc que la corba demanada, la braquistòcra, és la cicloide. Segui el cercle GLK de diàmetre a i el fem lliscar a través de AG , començant en A. El punt K del cercle descriurà una cicloide, que té la mateixa equació diferencial $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, després de substituir x per AC i y per CM . Es pot descobrir analíticament de la següent manera:

$$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-adx+2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$$

Tot i així, $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$ és una equació diferencial la suma de la qual ve donada per $\sqrt{ax - xx}$, és a dir, LO , i $\frac{2dx}{2\sqrt{ax - xx}}$ és la diferencial mateixa de l'arc $\widehat{GL}$, per tant l'equació suma de $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ tindrà y o $CM = \widehat{GL} - LO$, és a dir, $MO = CO - \widehat{GL} + LO$. Però $CO - \widehat{GL} = \widehat{LK}$, ja que CO equival al semicercle GLK , per tant tenim $MO = \widehat{LK} + LO$, i traient LO comú obtenim $ML = \widehat{LK}$, mostrant que la corba KMA és una cicloide.

18

recta AB i, al llarg de l'horitzontal AL , qualsevol cicloide que comenci en A i intersequi AB en R . De la mateixa proporció que AR és a AB , agafem el diàmetre del cercle generador de la cicloide ARS un quart, que serà el diàmetre del cercle generador de la cicloide buscada ABL , que passarà per B .

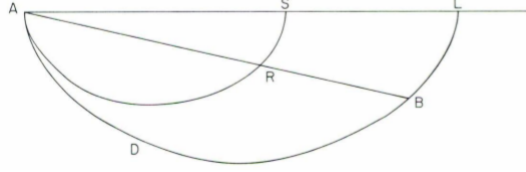


Figura 28. El raonament de Bernoulli. Obtingut de [10]

4 AMB EINES MATEMÀTIQUES ACTUALS

4.1 DEFINICIONS PRÈVIES

[16]

Definició 4.1. Una corba parametritzada de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un interval obert I de $\mathbb{R}$. La variable $\theta \in I$ s'anomena el paràmetre de la corba.

Definició 4.2. Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada. El vector $\alpha'(\theta) \in \mathbb{R}^n$ s'anomena vector velocitat de α en el punt θ . El punt θ_0 es diu singular si $\alpha'(\theta_0) = 0$, i regular si $\alpha'(\theta_0) \neq 0$. Si θ és un punt regular, el vector $\mathbf{t}(\theta) = \frac{\alpha'(\theta)}{|\alpha'(\theta)|}$ s'anomena el vector tangent unitari de α a θ . La recta que passa per $\alpha(\theta)$ i té com a vector director $\mathbf{t}(\theta)$ s'anomena la recta tangent a α en el punt θ .

Definició 4.3. Una corba $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ està parametritzada per l'arc si $\forall \theta \in I$ es compleix $|\alpha'(\theta)| = 1$

Definició 4.4. Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba. El punt $\theta \in I$ és regular si $\alpha'(\theta) \neq 0$. Altrament, diem que és un punt singular. La corba α és 1-regular si tots els seus punt són regulars.

Definició 4.5. Una corba 1-regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és 2-regular si $k(\theta) \neq 0 \forall \theta \in I$. En general, α és k -regular si els vectors $\alpha'(\theta), \alpha''(\theta), \dots, \alpha^{(k)}(\theta)$ són linealment independents $\forall \theta \in I$. Per tant, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és 2-regular en θ si $\alpha'(\theta) \times \alpha''(\theta) \neq (0, 0, 0)$.

Definició 4.6. Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba regular. El vector normal de α a $\theta_0 \in I$ és l'únic vector $\mathbf{n}(\theta_0) \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a $\mathbf{t}(\theta_0)$. La recta que passa per $\alpha(\theta_0)$ i té com a vector director $\mathbf{n}(\theta_0)$ s'anomena la recta normal a α en el punt θ .

Definició 4.7. Sigui α una corba no necessàriament parametritzada per l'arc. Aleshores, la curvatura de α és:

$$k_\alpha(\theta) = \frac{|\alpha'(\theta) \wedge \alpha''(\theta)|}{|\alpha'(\theta)|^3}$$

Si la corba està parametritzada per l'arc, aleshores la curvatura és $|\alpha'(\theta)| = k(\theta)$.

Definició 4.8. Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc. La funció $\tau_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$\tau_\alpha(\theta) = \frac{\det(\alpha'(\theta), \alpha''(\theta), \alpha'''(\theta))}{|\alpha''(\theta)|^2}$$

s'anomena la torsió d'una corba.

Definició 4.9. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc. Per a cada $\theta \in I$ es defineix

- El vector tangent $t(\theta) = \alpha'(\theta)$
- El vector normal $n(\theta) = \frac{\alpha''(\theta)}{|\alpha''(\theta)|}$
- El vector binormal $b(s) = t(s) \times n(s)$

La terna $t(\theta), n(\theta), b(\theta)$ s'anomena Triedre de Frenet en el punt θ .

Teorema 1. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc. Es compleix:

1. $t'(\theta) = k_\alpha(\theta) \times n(\theta)$
2. $n'(\theta) = -k_\alpha(\theta) \times t(\theta) + \tau_\alpha(\theta) \times b(\theta)$

Demostració. 1. Per definició $t(\theta) = \alpha'(\theta)$ i per tant $t'(\theta) = \alpha''(\theta)$. Per altra banda es té $k(\theta) = \|\alpha''(\theta)\|$ i $n(\theta) = \frac{\alpha''(\theta)}{|\alpha''(\theta)|}$. Tot plegat, doncs:

$$n(\theta) = \frac{\alpha''(\theta)}{\|\alpha''(\theta)\|} = \frac{t'(\theta)}{k(\theta)} \rightarrow t'(\theta) = k(\theta)n(\theta)$$

S'omet la demostració del punt 2. □

4.2 LA CICLOIDE

La cicloide és la corba descrita per un punt fix d'una circumferència (circumferència generatriu) quan aquesta gira sobre una línia recta. (recta directriu). [18]

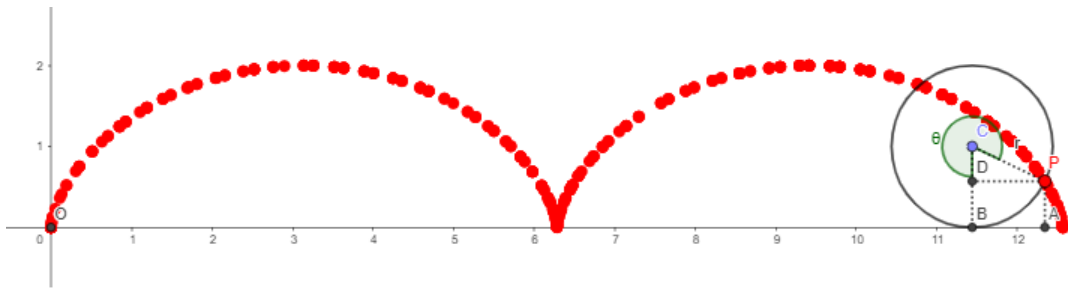


Figura 29. Construcció de la cicloide

4.2.1 Equacions paramètriques

Es considera un punt P de la circumferència situat a l'origen de coordenades (0,0). Es fa girar la circumferència fins que el punt P es trobi a $(2\pi R, 0)$, essent R el radi de la circumferència. S'obtenen les equacions paramètriques de la corba descrita. Es remarca que $R = CP$, i θ és l'angle format per DCP . Sigui C el centre de la circumferència, i siguin A i B les coordenades de les abscisses i les ordenades del punt P, respectivament. PD és la recta perpendicular al radi $R = CB$.

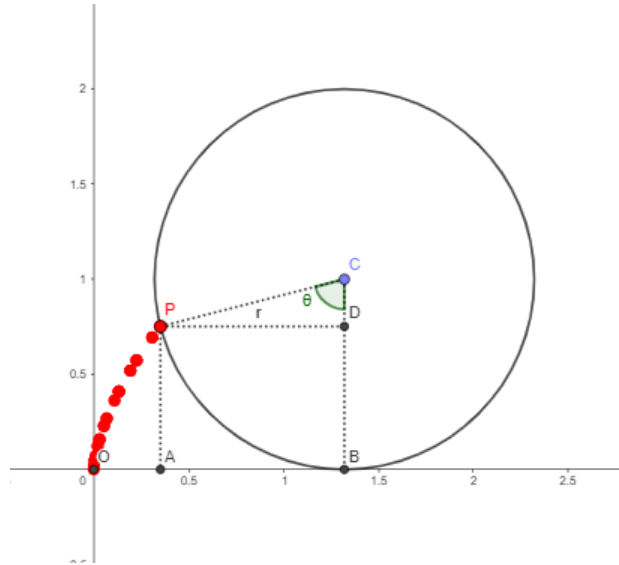


Figura 30. Obtenció de les equacions paramètriques

Aleshores:

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \widehat{PB} - \overline{PD} \quad y = \overline{PA} = \overline{CB} - \overline{CD}$$

L'angle θ és l'angle comprès entre el segment vertical que passa pel centre C perpendicular a l'eix d'abscisses i el radi r . Les coordenades (x, y) per a un punt qualsevol s'obtenen de la següent manera:

$$x(\theta) = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta) \quad y(\theta) = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Per tant, la parametrització $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ve donada per:

$$\alpha(\theta) = (r\theta - r \sin \theta, r - r \cos \theta) = r(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$$

4.2.2 La longitud i l'àrea

Definició 4.10. Si $\alpha[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ és una corba diferenciable amb $\alpha'(\theta)$ contínua a $[a, b]$, la següent expressió s'anomena longitud de α :

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(\theta)\| d\theta = \int_a^b \sqrt{\frac{dx^2}{d\theta} + \frac{dy^2}{d\theta}} d\theta$$

El mòdul del vector velocitat ens permet calcular la longitud d'una corba. En el cas de la cicloide, tenim:

$$x'(\theta) = r(1 - \cos(\theta)) \quad y'(\theta) = r \sin(\theta) \quad \|\alpha'(\theta)\|^2 = 2r^2(1 - \cos(\theta))$$

Teorema 2. La longitud d'un arc de cicloide és $8r$, on r és el radi del cercle generador.

$$\begin{aligned} \text{Demostració. } L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(1 - \cos(t)))^2 + (r \sin(t))^2} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2r[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)]_0^{2\pi} = 8r \quad \square \end{aligned}$$

Definició 4.11. Sigui C una corba definida per $x = x(\theta), y = y(\theta)$ amb $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Si les equacions defineixen entre els punts d'abscisses $a = x(\theta_1)$ i $b = x(\theta_2)$ una funció $y = f(x)$ integrable, aleshores l'àrea tancada entre la corba C

i l'eix OX és:

$$Area = \int_a^b |f(x)|dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |y(\theta)x'(\theta)|d\theta$$

En el cas de la cicloide, es té:

$$x(\theta) = r(\theta - \sin(\theta)) \quad y(\theta) = r(\theta - \cos(\theta)) \quad x'(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$$

Teorema 3. L'àrea definida sota un arc de cicloide és $3\pi r^2$, on r és el radi del cercle generador.

$$\begin{aligned} Demostració. Area &= \int_0^{2\pi} r^2(1-\cos(\theta))(1-\cos(\theta))d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos(\theta)+\cos^2(\theta))d\theta = r^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta \right] \\ &= r^2 [2\pi + 0 + \pi] = 3\pi r^2 \quad \square \end{aligned}$$

4.3 EL CÀLCUL DE LA RECTA TANGENT I LA RECTA NORMAL

Basant-nos en la definició 4.2, calculem la recta tangent a la cicloide. Es té:

$$\alpha'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = r - \cos(\theta) \\ y'(\theta) = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Recordem que la recta tangent és de la forma $\{\alpha(\theta) + \lambda\alpha'(\theta), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Segui r és el radi de la circumferència generatriu. Procedim:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin(\theta)) + \lambda r(1 - \cos(\theta)) \\ y(\theta) = r(\theta - \cos(\theta)) + \lambda r(\sin(\theta)) \end{cases}$$

Aquestes són les equacions paramètriques de la recta tangent a la cicloide. Expressades en forma general, s'obté:

$$\begin{aligned} \frac{x - r(\theta - \sin(\theta))}{r(1 - \cos(\theta))} &= \frac{y - r(\theta - \cos(\theta))}{r\sin(\theta)} \\ xsin(\theta) - r\theta sin(\theta) - y + ycos(\theta) - 2rcos(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Calculem la recta normal a la cicloide. Segui m el pendent de la recta normal en aquest cas. Aleshores $m = \frac{1}{\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}}$.

Per tant:

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy} = \frac{r - r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$$

Usant l'expressió contínua de la recta, la normal en qualsevol punt de la cicloide és de la forma:

$$\begin{aligned} y - (r - r\cos\theta) &= \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} (x - (r\theta - r\sin\theta)) \\ \frac{y - (r - r\cos\theta)}{x - (r\theta - r\sin\theta)} &= \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} \\ y\sin\theta - r\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta &= x\cos\theta - r\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta - x + r\theta + r\sin\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta - r\theta\cos\theta - x + r\theta &= 0 \\ x(\cos\theta - 1) - y\sin\theta + r\theta(1 - \cos\theta) &= 0 \end{aligned}$$

En el següent enllaç de [geogebra](#) es poden veure gràficament les dues rectes.

4.4 EL CÀLCUL DE L'EVOLUTA

Definicions prèvies

[19] [20]

Definició 4.12. Sigui $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ $\theta \in I$. Definim a cada punt regular de α $\theta_0 \in I$ la seva recta normal. És la recta que passa per $\alpha(\theta_0)$ i és perpendicular a la tangent en el punt, per tant el vector director és $\perp \alpha'(\theta_0)$. Les rectes normals a la corba estan situades en el pla normal de α en θ_0 , que és de la forma $\{\alpha(\theta_0) + \delta n(\theta_0) + \gamma b(\theta_0) | \delta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Definició 4.13. Una corba $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ les tangents de la qual constitueixen una família uniparamètrica de normals a la corba α , essent el vector director de les normals una funció diferenciable, s'anomena evoluta de α .

Es dedueix l'equació de les evolutes d'una corba de classe C^3 de la següent manera:

Teorema 4. Si una evoluta existeix, el vector posició dels seus punts és de la forma $\beta(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)n(\theta) + \mu(\theta)b(\theta)$ on λ, μ són funcions del paràmetre θ .

Demostració. Se suposa que aquestes són diferenciables i es vol determinar-les. El vector tangent a la corba és de la forma

$$\beta'(\theta) = \alpha'(\theta) + \lambda'(\theta)n(\theta) + \lambda(\theta)n'(\theta) + \mu'(\theta)b(\theta) + \mu(\theta)b'(\theta)$$

Es substitueix $t'(\theta)$ $n'(\theta)$ i $b'(\theta)$ per les respectives expressions de les fórmules de Frenet i s'obté

$$\beta'(\theta) = t(\theta) + \lambda'(\theta)n(\theta) + \lambda(\theta)(-kt(\theta) + \tau b(\theta) + \mu'(\theta)b(\theta) - \mu(\theta)\tau n(\theta)$$

$$\beta'(\theta) = (1 - \lambda(\theta)k)t(\theta) + (\lambda'(\theta) - \mu(\theta)\tau)n(\theta) + (\lambda(\theta)\tau + \mu'(\theta))b(\theta)$$

El vector tangent és paral·lel al vector $\lambda(\theta)n(\theta) + \mu(\theta)b(\theta)$ per definició d'evoluta. D'aquesta forma, el vector $t(\theta)$ és nul i per tant $1 - \lambda k = 0$. Alhora, es substitueix $n(\theta)$ i $b(\theta)$ per λ i μ , al ser aquests dos vectors linealment independents. S'obté:

$$1 - \lambda(\theta)k = 0$$

$$\mu(\theta)(\lambda'(\theta) - \mu(\theta)\tau) - \lambda(\theta)(\lambda(\theta)\tau + \mu'(\theta)) = 0$$

La primera equació implica que $\lambda(\theta) = \frac{1}{k}$. Tenim doncs que $\lambda(\theta)$ és el radi de curvatura de la corba donada i per tant el punt del vector posició $\alpha(\theta) + \lambda(\theta)n(\theta)$ és el centre de curvatura. No ens centrarem en la resolució de la segona expressió ja que concerneix corbes que tenen la torsió no nul·la i no és el cas de la cicloide.

□

El previ raonament de la demostració ens condueix a la següent observació:

Observació. Si la corba és plana, aleshores $\tau = 0$ i entre les evolutes de la corba n'existeix una que està al mateix pla de la corba. En aquest cas, l'equació de l'evoluta és de la forma

$$\beta(\theta) = \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta)}n(\theta)$$

$$\theta \in I \quad k(\theta) \neq 0,$$

Lemma 5. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba 2-regular. $\tau(\theta) = 0 \forall \theta \in I \iff \text{tr}(\alpha)$ està continguda en un pla.

Demostració. $\implies$ Usant la tercera fórmula de Frenet, $\tau(\theta) = 0 \forall \theta \in I$, llavors $b'(\theta) = 0$ i $b(\theta) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Ara cal comprovar que la corba està continguda en un pla perpendicular al vector binormal, que és constant. Es comprova que el vector que uneix qualsevol punt de la corba a un punt fix d'aquesta és perpendicular al binormal. Per fer-ho, es deriva l'expressió $\langle \alpha(\theta), b_0 \rangle$:

$$\frac{d}{d\theta}(\langle \alpha(\theta), k \rangle) = \left\langle \frac{d}{d\theta}(\alpha(\theta)), k \right\rangle + \langle \alpha(\theta), \frac{d}{d\theta}k \rangle = \langle t(\theta), k \rangle + \langle \alpha(\theta), 0 \rangle = 0 \rightarrow \langle t(\theta), k \rangle = 0.$$

Per tant, $\langle \alpha(\theta), k \rangle$ és constant $\rightarrow \langle \alpha(\theta), k \rangle = \langle \alpha(\theta_0), k \rangle \rightarrow \langle \alpha(\theta) - \alpha(\theta_0), k \rangle = 0 \rightarrow \alpha(\theta) - \alpha(\theta_0)$ és ortogonal a $k \rightarrow \alpha(\theta)$ pertany al pla ortogonal a k que passa per $\alpha(\theta_0)$. És cert $\forall \theta \in I$, per tant $\text{tr}(\alpha)$ està continguda en un pla.

$\impliedby$ Si la corba és plana, es troba en un pla. Es pren una base tal que α estigui continguda al pla $z = 0$ i per tant s'expressa com $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta), 0)$. Els vectors tangent i normal a la corba es troben en aquest pla. Es té que el vector binormal és perpendicular al pla i és constant: $b'(\theta) = 0$. Per la tercera fórmula de Frenet, $b'(\theta) = -\tau n(\theta) \rightarrow \tau = 0$ ja que $n(\theta) \neq 0$ al ser la corba 2-regular. $\square$

Definició 4.14. S'anomena centre de curvatura de la corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ en un punt $\alpha(\theta)$ on la curvatura és no nul·la al punt $c(\theta) = \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta)}n(\theta)$. El radi de curvatura és la distància $\rho(\theta)$ de $c(\theta)$ a $\alpha(\theta)$ i és de la forma $\rho(\theta) = \frac{1}{|k(\theta)|}$.

Definició 4.15. La circumferència de radi $\rho(\theta)$ i centre $c(\theta)$, on ρ és el radi de curvatura i c el centre de curvatura, s'anomena circumferència osculatriu del punt regular θ . Aquesta circumferència està situada al pla osculador, determinat pels vectors unitaris tangent i normal. La circumferència osculatriu és aquella que té l'ordre de contacte més gran possible en un punt.

Per les definicions prèviament exposades, observem que l'evoluta d'una corba és el lloc geomètric dels seus centres de curvatura. En [aquest enllaç](#), prèviament presentat, s'observa la construcció de l'evoluta a partir de la circumferència osculatriu.

Definició 4.16. Una corba C_1 que interseca amb angle recte a les tangents de una corba C s'anomena involuta o evolvent de C . Es dedueix que C_1 és involuta de C si, i només si, C és evoluta de C_1 .

Teorema 6. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba de classe C^2 . L'equació d'una involuta, si existeix, és de la forma $\gamma(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)t(\theta)$.

Demostració. Com que el vector tangent γ' és ortogonal al vector tangent t de la corba original, tenim:

$$\gamma'(\theta) = \alpha' + \lambda't + \lambda t' = (1 + \lambda')t + \lambda kn.$$

Com que $\gamma't = 0$ s'obté $1 + \lambda' = 0 \rightarrow \lambda' = -1 \rightarrow \lambda = s_0 - s$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Per tant, l'equació de la involuta és $\gamma(\theta) = \alpha(\theta) + (s_0 - s)(\theta)$. $\square$

Donada una corba plana, si a cada punt hi associem el seu centre de curvatura, s'obté una nova corba anomenada evoluta, i la corba original s'anomena involuta. La normal a la involuta és la tangent a l'evoluta.

Teorema 7. L'evoluta d'una cicloide és una cicloide.

Amb eines analítiques

Demostració. L'equació del feix de rectes normals és

$$x(\cos\theta - 1) - y\sin\theta + r\theta(1 - \cos\theta) = 0$$

La derivada d'aquesta equació respecte θ és

$$-x\sin\theta - y\cos\theta + r(1 - \cos\theta) - r\theta = x\sin\theta + y\cos\theta - r(1 + \theta\sin\theta - \cos\theta) = 0.$$

Eliminem la variable y d'ambdues expressions amb una reducció:

$$\begin{aligned}\cos\theta[x(\cos\theta - 1) - y\sin\theta + r\theta(1 - \cos\theta)] &= 0 \\ \sin\theta[x\sin\theta + y\cos\theta - r(1 + \theta\sin\theta - \cos\theta)] &= 0\end{aligned}$$

Sumem les dues expressions:

$$\begin{aligned}x\cos^2\theta - x\cos\theta + r\theta\cos\theta - r\theta\cos^2\theta + x\sin^2\theta - r\sin\theta - r\theta\sin^2\theta - r\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ x - x\cos\theta + r\theta\cos\theta - r\theta - r\sin\theta - r\sin\theta\cos\theta &= 0\end{aligned}$$

Si expressem x en funció de θ , obtenim:

$$x = r \frac{\theta + \sin\theta - \theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta}{1 - \cos\theta}$$

Simplificant, obtenim:

$$x(\theta) = r(\theta + \sin\theta)$$

Realitzem el mateix procediment per a la variable y . Eliminem la variable x d'ambdues expressions amb una reducció:

$$\begin{aligned}\sin\theta[x(\cos\theta - 1) - y\sin\theta + r\theta(1 - \cos\theta)] &= 0 \\ (\cos\theta - 1)[x\sin\theta + y\cos\theta - r(1 + \theta\sin\theta - \cos\theta)] &= 0\end{aligned}$$

Sumem les dues expressions:

$$\begin{aligned}x\sin\theta(\cos\theta - 1) - y\sin^2\theta + r\theta - r\theta\sin\theta\cos\theta - x\sin\theta(\cos\theta - 1) - y\cos^2\theta \\ + y\cos\theta + r\cos\theta + r\theta\sin\theta\cos\theta - r\cos^2\theta - r - r\theta\sin\theta + r\cos\theta &= 0 \\ -y + y\cos\theta + 2r\cos\theta - r\cos^2\theta - r &= 0\end{aligned}$$

Si expressem y en funció de θ , obtenim:

$$y = r \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta - 1}$$

Simplificant, obtenim:

$$y(\theta) = r(-1 + \cos\theta)$$

Tot plegat, obtenim les equacions

$$\begin{aligned}x(\theta) &= r\theta + r\sin\theta \\ y(\theta) &= -r + r\cos\theta\end{aligned}$$

Fixem-nos que aquestes equacions són una reparametrització de la cicloide.

□

Calculem l'evoluta de la cicloide usant l'observació teorema 4. [21]

$$\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{2r\sqrt{1-\cos(\theta)}} \quad \|\alpha'(\theta)\| = 2r\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \quad \|\alpha'(\theta)\| = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Calculem el vector tangent unitari:

$$t = \frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|} = \frac{r(1-\cos\theta, \sin\theta)}{2r\sin(\theta/2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta/2)}, \frac{\sin\theta}{\sin(\theta/2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}, \frac{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right)$$

$$t = (\sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2})).$$

El vector normal unitari és

$$n = (-\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}))$$

Recuperem la definició 4.7 i obtenim la curvatura:

$$k_\alpha(\theta) = \frac{r^2((1-\cos(\theta))\cos\theta - \sin^2\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|^3} = \frac{r^2(\cos\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta)}{(2r\sin(\frac{\theta}{2}))^3} = \frac{r^2(\cos\theta - 1)}{8r^3\sin^3(\frac{\theta}{2})} =$$

$$= \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}) - 1}{8r\sin^3(\frac{\theta}{2})} = \frac{-2\sin^2(\frac{\theta}{2})}{8r\sin^3(\frac{\theta}{2})} = -\frac{1}{4r\sin(\theta/2)}$$

Tot plegat, obtenim que l'evoluta és efectivament una reparametrització de la cicloide:

$$\beta(\theta) = r(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) - (4r\sin(\frac{\theta}{2}))(-\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})) = r(\theta + \sin\theta, -1 + \cos\theta)$$

La propietat tautòdrona

Teorema 8. La cicloide compleix la propietat tautòdrona.

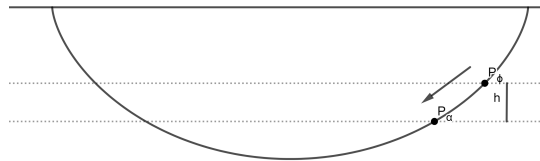


Figura 31. Plantejament del problema de la tautòdrona

Demostració. Sigui la velocitat expressada de la següent manera: $v = \frac{ds}{dt}$

Regint-nos amb la caiguda lliure, tenim $v = \sqrt{2gh}$ Per tant: $\sqrt{2gh} = \frac{ds}{dt}$

Cal resoldre la següent integral:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} \rightarrow t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{\sqrt{2gh}}$$

La longitud ds ha estat calculada prèviament i és $ds = 2r \sin(\frac{\alpha}{2}) d\alpha$. Calculem l'alçada h :

$$h = y_\phi - y_\alpha = r(\cos\phi - 1) - r(\cos\alpha - 1) = r(\cos\phi - \cos\alpha)$$

Per la fórmula de l'angle doble, s'obté

$$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) \longrightarrow \cos\phi = \cos^2(\frac{\phi}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2}) = 2\cos^2(\frac{\phi}{2}) - 1$$

Tot plegat:

$$h = r[(2\cos^2(\frac{\phi}{2}) - 1) - (2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1)] = r[2(\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2}))]$$

Podem expressar la velocitat de la següent manera:

$$v_\alpha = \sqrt{2g} \sqrt{r(2(\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})))} = 2\sqrt{gr} \sqrt{\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}$$

Tot plegat, tenim:

$$dt = \frac{2r \sin(\frac{\alpha}{2})}{2\sqrt{gr} \sqrt{\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}} d\alpha \rightarrow dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}} d\alpha$$

Es prossegueix a integrar des del punt d'on cau la bola, $\alpha = \phi$, fins al punt més baix de la cicloide, que és on la circumferència ha fet mitja volta i per tant $\alpha = \pi$.

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_\phi^\pi \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\phi}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}} d\alpha = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\cos\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - u^2}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}} [\arcsin(x)]_0^1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \end{aligned}$$

S'ha usat el canvi de variable $u = \cos(\frac{\alpha}{2}) \rightarrow du = -\frac{1}{2}\sin(\frac{\alpha}{2}) d\alpha$

Efectivament, el temps de descens ve determinat tan sols pel radi del cercle generador de la cicloide i per l'acceleració de la gravetat. Aquest és independent del punt de la cicloide on la bola comença a moure's. $\square$

4.4.1 El pèndol isocrònic: longitud

Les coordenades de la cicloide són $\alpha(\theta) = (r(\theta - \sin(\theta)), r(\cos(\theta) - 1))$. Les de la seva evoluta, com hem vist, són $\beta(\theta) = (r(\theta + \sin(\theta)), r(-1 + \cos(\theta)))$.

La longitud del segment de recta tangent és:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[(r\sin(\theta) + r\theta) - (r\theta - r\sin(\theta))]^2 + [(-r\cos(\theta) + r) - (r\cos(\theta) - r)]^2} = \\ &= \sqrt{(2r\sin(\theta))^2 + (2r - 2r\cos(\theta))^2} = \sqrt{4r^2\sin^2(\theta) + 4r^2\cos^2(\theta) - 8r^2\cos(\theta) + 4r^2} = \\ &= \sqrt{8r^2 - 8r^2\cos(\theta)} = \sqrt{8r^2(1 - \cos(\theta))} = \sqrt{16r^2 \frac{1 - \cos(\theta)}{2}} = 4r\sin(\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

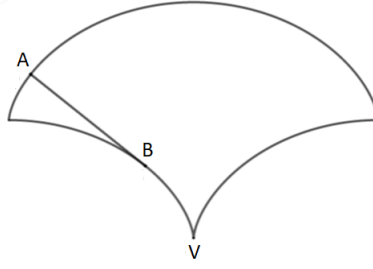


Figura 32. Representació gràfica

Per altra banda, es calcula la longitud de l'arc $\widehat{BV}$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_\beta}{d\theta} &= r + r\cos(\theta) & \left(\frac{dx_\beta}{d\theta}\right)^2 &= r^2 + 2r^2\cos(\theta) \\ \frac{dy_\beta}{d\theta} &= r\sin(\theta) & \left(\frac{dy_\beta}{d\theta}\right)^2 &= r^2\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(\beta_{BV}) &= \int_\theta^\pi \sqrt{r^2 + 2r^2\cos(\theta) + r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} d\theta = \int_\theta^\pi \sqrt{2r^2(1 + \cos(\theta))} d\theta = \\ &= \int_\theta^\pi \sqrt{4r^2 \frac{1 + \cos(\theta)}{2}} d\theta = 2r \int_\theta^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4r \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_\theta^\pi = 4r - 4r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Se sumen els dos resultats i s'obté:

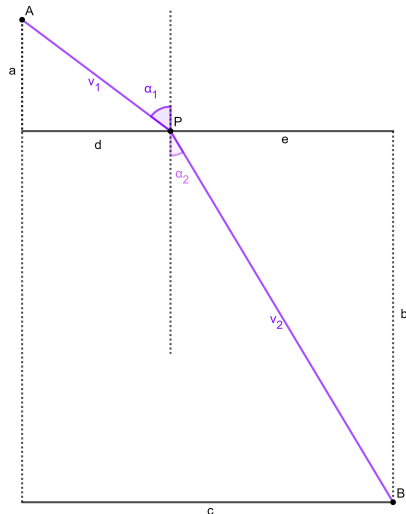
$$AB + \widehat{BV} = 4r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 4r - 4r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 4r$$

Aquest resultat permet concloure, doncs, que la trajectòria d'un cordill de longitud $4r$ és una cicloide.

4.5 LA BRAQUISTÒCRONA

AMB EINES MATEMÀTIQUES ACTUALS

Realitzem el càlcul adaptant el raonament de Bernoulli amb eines actuals [22]. Considerem un raig de llum que viatja del punt A al punt P amb una velocitat v_1 i després del punt P al punt B amb una velocitat v_2 . Entre A i B hi ha un canvi de medi. Sigui a la coordenada vertical del primer medi, i sigui b la del segon. El desplaçament horitzontal és c . Sabem que el temps és distància entre velocitat. Definim la següent funció:



$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Procedim a derivar la funció donada:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2} \right) = \\ &= \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}\end{aligned}$$

El nostre objectiu és minimitzar el temps de descens. Iguaem doncs la funció derivada a zero: $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \quad \text{Equation 4.1.}$$

Figura 33. Un raig de llum que canvia de medi

Alhora, notem que

$$\sin(\alpha_1) = \frac{d}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Substituint aquestes dues equacions a (4.1), s'obté

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}$$

Aquesta darrera equació és coneguda com la *Llei de Refracció de Snell* i demostra el *Principi de Mínima Acció de Fermat*.

Definició 4.17. El principi de mínima acció de Fermat afirma que la trajectòria que relitza un raig de llum entre dos punts és aquella en la que emplea un temps mínim en recórrer-la.

Definició 4.18. Si una ona incideix sobre una superfície que separa dos medis diferents, a més de reflectir una part, la resta penetra en el segon medi. En general, la velocitat de l'ona en aquest segon medi és diferent que en el primer, i com a conseqüència l'ona canviarà de direcció. Aquest fenomen s'anomena refracció. La llei que regeix aquest fenomen s'anomena llei de Snell i s'enuncia de la següent manera:

- El raig incident, el raig refractat i la normal estan els tres en un mateix pla.
- Siguin v_i i v_r són les velocitats en el primer i segon medi, i siguin α_i i α_r els angles de reflexió i de refracció (angles respecte la normal), aleshores:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_r} = \frac{v_i}{v_r}$$

Si dividim el raig de llum en n substrats, obtenim:

$$\frac{\sin(\alpha_i)}{v_i} \quad i \in 1, \dots, n$$

A mesura que dividim els substrats en seccions cada vegada menors, el camí obtingut és una corba i la velocitat decreix constantment tal que

$$\frac{\sin \alpha}{v} = K \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{Equation 4.2.}$$

Tornem al problema de la braquistòcrona. Suposem que la partícula es desplaça de A a B amb el menor temps possible. Si assumim que no hi ha fricció, podem aplicar el principi de conservació de l'energia mecànica i obtenim que $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, on la part esquerra és l'energia potencial de la partícula al punt A i la dreta és l'energia cinètica de la partícula en B. Si aïllem la velocitat, obtenim:

$$v = \sqrt{2gy}$$

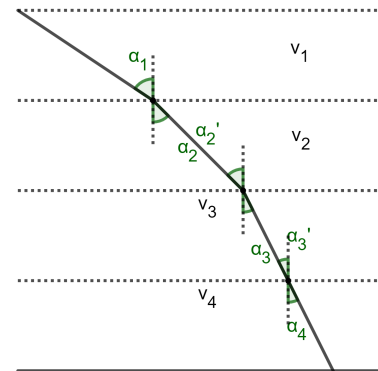


Figura 34. Representació gràfica

Com que α i β de la figura 34 són angles complementaris, $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{1}{\sec(\beta)}$.

Sabent que $\sec^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha)$ s'obté $\frac{1}{\sec(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$

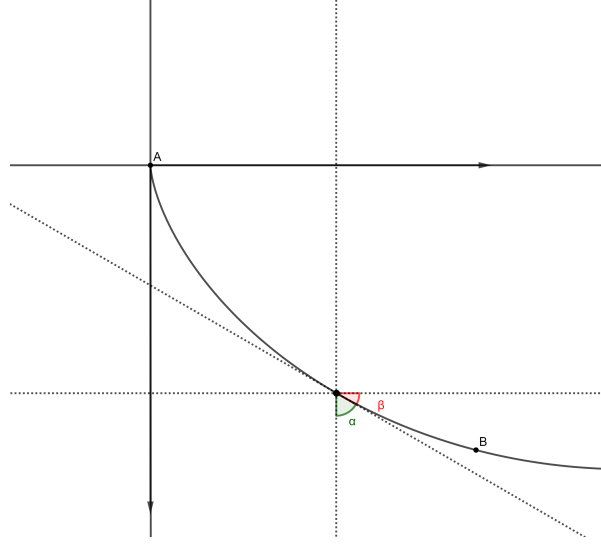


Figura 35. Representació gràfica

Si substituïm aquest resultat i l'expressió de la velocitat a (4.2), obtenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (y')^2}} &= k & \sqrt{2g}\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2} &= \frac{1}{k} \\ \sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2} &= \frac{1}{k\sqrt{2g}} & y[1 + (y')^2] &= \frac{1}{2gc^2} \end{aligned}$$

Notem que l'expressió de la dreta és constant. Tenim doncs que l'equació diferencial de la braquistòcrona és:

$$y[1 + (y')^2] = C \quad C \in \mathbb{R}$$

Es procedeix a resoldre l'equació diferencial de la braquistòcrona:

$$\begin{aligned} y[1 + (\frac{dy}{dx})^2] &= C & 1 + (\frac{dy}{dx})^2 &= \frac{C}{y} & (\frac{dy}{dx})^2 &= \frac{C}{y} - 1 \\ (\frac{dy}{dx})^2 &= \frac{C - y}{y} & \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{C - y}{y}} & dx &= \sqrt{\frac{y}{C - y}} dy \end{aligned}$$

Introduïm una nova variable:

$$\frac{y}{C - y} = \tan(\phi)^2 \quad \text{Equation 4.3.}$$

Operant:

$$\begin{aligned} y &= (C - y) \tan(\phi)^2 & y &= C \tan(\phi)^2 - y \tan(\phi)^2 \\ y(1 + \tan(\phi)^2) &= C \tan(\phi)^2 & y \sec(\phi)^2 &= C \tan(\phi)^2 & y &= C \sin(\phi)^2 \end{aligned}$$

Si es deriva respecte ϕ s'obté

$$dy = 2C \sin(\phi) \cos(\phi) d(\phi) \quad \text{Equation 4.4.}$$

Substituint (4.3) i (4.4) a l'expressió inicial $dx = \sqrt{\frac{y}{C-y}} dy$, s'obté

$$dx = (\tan(\phi))(2C \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi) \quad dx = 2C \sin(\phi)^2 d\phi$$

(Ja que $\tan(\phi) \cos(\phi) = \sin(\phi)$). S'integra a ambdós costats i s'usa que $\sin(\phi)^2 = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int 2C \sin(\phi)^2 d\phi & x &= 2C \int \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi & x &= C \int d\phi - C \int \cos 2\phi d\phi \\ x &= C\phi - \frac{1}{2} C \sin 2\phi + c_1 & x &= \frac{C}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + c_1 \end{aligned}$$

Amb la condició inicial (0,0) per a (4.3) es té $\phi = 0$. Per tant, c_1 és 0 i

$$x = \frac{C}{2} (2\phi - \sin 2\phi)$$

$$y = C \sin(\phi)^2 \quad y = C \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) \quad y = \frac{C}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

Si $a = \frac{C}{2}$ i $\theta = 2\phi$, les equacions passen a ser

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

que són les equacions paramètriques de la cicloide.

4.5.1 El càlcul de variacions

Definicions prèvies Els funcionals són un tipus determinat de funcions els valors dels quals es determinen a partir dels valors d'altres funcions, són funcions on la variable independent és una funció. [23]

Definició 4.19. Anomenem M a una certa classe de funcions (i.e $M = C^r([0, 1], R^n)$). Definim una funció J sobre M a valors reals:

$$J : M \rightarrow R$$

$$y \rightarrow J(y)$$

Aquesta funció J s'anomena funcional.

Definició 4.20. El funcional J és diferenciable a y_0 si $J(y_0 + \delta y) = J(y_0) + L(y_0, \delta y) + R(y_0, \delta y)$.

Es té que $L(y_0, \delta y)$ és un funcional lineal respecte δy i $R(y_0, \delta y) = O((\delta y)^2)$. $(DJ)_y$ s'anomena variació o derivada del funcional J a y .

El càlcul de variacions és una de les branques amb les quals es treballa amb funcionals. L'objectiu d'aquest és cercar les funcions per les quals una determinada magnitud és màxima o mínima. EL problema de la braquistòcrona és un exemple clàssic de problema de càlcul de variacions ja que cal minimitzar el temps de la funció que determina el moviment de caiguda de la partícula.[24] En aquest apartat es prescindeixen de certes demostracions.

Teorema 9. Condició necessària d'extrem d'un funcional.

Si J és un funcional derivable definit a M i pren el seu valor extrem a la funció y de l'interior de M , aleshores $DJ(y) = 0$.

Sigui $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Definim l'acció associada a la funció F a través del funcional: $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, \dot{y}, x) dx$. El nostre objectiu és trobar una funció diferenciable que ens doni un extrem d'aquesta integral.

Teorema 10. L'acció associada a F és diferenciable i la seva derivada a y val $(DJ)_y(\delta) = \int_{x_0}^{x_1} [\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}] \delta dx + (\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) \delta \Big|_{x_0}^{x_1}$

Lemma 11. Si $f(x)$ és contínua en $[x_0, x_1]$ i $\int_{x_0}^{x_1} f(x)h(x)dx = 0$ per qualsevol funció contínua real $h(x)$ que verifica $h(x_0) = h(x_1) = 0$, aleshores $f(x) = 0$ per a $x \in [x_0, x_1]$.

Definició 4.21. Sigui y una corba tal que $(DJ)_y(\delta) = 0$ per a tota corba δ . Aquesta corba y s'anomena extremal.

Teorema 12. Una condició necessària i suficient perquè una corba y sigui extremal de J associada a F és que la corba verifiqui

$$\frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}) = 0$$

Definició 4.22. Les equacions $\frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}) = 0$ s'anomenen equacions d'Euler-Lagrange. Són n equacions diferencials de segon ordre. Els extrems són les funcions que compleixen les equacions d'Euler.

Observació. Un cas concret de les equacions d'Euler-Lagrange es dona quan F és independent de x . En aquest cas, multipliquem l'equació per $\dot{y}$:

$$0 = [\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}] \dot{y} = \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{y}$$

Si derivem F respecte x , obtenim:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \ddot{y} \quad \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \ddot{y} = \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}$$

Notem que $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Si substituïm aquesta expressió a l'anterior, resulta:

$$0 = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \ddot{y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{y} = \frac{d}{dx} (F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{y}) \rightarrow F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Aquesta expressió s'anomena identitat de Beltrami.

Cas concret: la braquistòcrona

Sigui s la longitud d'arc de corba que uneix A amb P . En el punt P , la velocitat de la partícula vindrà determinada per $v = ds/dt$, on $s(t)$ és la posició. Obtenim doncs $dt = ds/v$. [25]

El temps que la partícula tarda en desplaçar-se d' A a P ve donat per la següent integral:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v}$$

S'escull un sistema de coordenades amb l'origen al punt A i l'eix d'ordenades orientat negativament. Definim l'energia potencial i cinètica:

$$V(y) = -mgy \quad T(y) = \frac{1}{2}mv^2$$

Volem expressar v i ds en funció de x i de $y(x)$. Suposem que la partícula parteix del repòs. Com que no hi ha fricció, es compleix el principi de conservació de l'energia. L'energia cinètica al punt A és 0 ja que la partícula està en repòs. En el punt P, l'energia cinètica serà equivalent a la variació de l'energia potencial entre A i P:

$$T(y) = -V(y) \quad \frac{mv^2}{2} = mgy \rightarrow v(y) = \sqrt{2gy}$$

Per altra banda, tenim els punts $P(x, y)$ i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la corba $y = y(x)$. Sigui Δs la variació de la longitud d'arc al passar d'un punt a un altre. Notem el següent:

$$\Delta s \cong 0 \rightarrow \Delta s \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Si $\Delta x \cong 0$ es té

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Per tant, el temps que la partícula tarda d'anar de A fins a B val

$$J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \dot{y}}}{2gy} dx \quad \text{on} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

J és un funcional de y . Es vol trobar el mínim d'aquest funcional respecte les possibles funcions y : s'obtinran les equacions de la braquistòcrona com a extremal d'aquest funcional.

És un cas concret de les equacions d'Euler-Lagrange, on la funció $F(y, \dot{y}, x) = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}}}{\sqrt{2gy}}$ és independent del paràmetre x , i per tant $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ (Identitat de Beltrami: $F - \dot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = C$). En aquest cas, es té:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

Se substitueix aquesta expressió a la identitat de Beltrami:

$$C = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}}}{\sqrt{2gy}} - \frac{\dot{y}}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \quad C\sqrt{2g} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

Elevant aquesta expressió al quadrat, s'obté:

$$2gC^2 = \frac{1}{y(1 + \dot{y}^2)} \quad y(1 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2gC^2}$$

Si denotem $k = \frac{1}{2gC^2}$ es té:

$$\begin{aligned} k &= y(1 + \dot{y}^2) & k &= y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) & \frac{k}{y} - 1 &= \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{k-y}{y}} &= \frac{dy}{dx} & dx &= \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy & x &= \int \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy \end{aligned}$$

Fent el canvi de variable $y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = k \sin^2 \frac{\theta}{2}$, s'obté:

$$x = \int \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} k \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) + B$$

Segui $\theta = 0$ en $y = 0$ on Les coordenades són tals que $x_a = y_a = 0$, per tant $B = 0$. Determinem k a través el punt B . S'obté com a solució les equacions paramètriques de la cicloide:

$$x = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \quad y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

Hem resolt, doncs, el problema de la braquistòcrona usant el càlcul de variacions.

5 CORBES RELACIONADES AMB LA CICLOIDE

La cicloide és la corba descrita per un punt fix d'una circumferència (circumferència generatriu) quan aquesta gira sobre una línia recta. (recta directriu).

5.0.1 Trocoides

S'ha estudiat el cas particular on el punt fix que genera una corba pertany a la circumferència generatriu. De manera natural es pot plantejar quines corbes descriuen els punts que són exteriors i/o interiors a la circumferència generatriu. De manera general, es fa la següent classificació:

Siguin les equacions generals

$$\begin{cases} x(\theta) = r\theta - B\sin(\theta) \\ y(\theta) = r - B\cos(\theta) \end{cases}$$

Aleshores, es té:

- La cicloide escurçada si $B < r$
- La cicloide comú si $B = r$
- La cicloide allargada si $B > r$

Tots aquests tipus de corbes s'anomenen trocoides i la cicloide n'és un cas particular.

5.0.2 Epicicloides i hipocicloides

[9] Una altra pregunta natural que es pot plantejar és quines corbes descriuen punts fixos en circumferències que roden en altres corbes que no siguin una recta.

Una epicicloide és la corba descrita per un punt fix a una circumferència que gira per l'exterior d'una circumferència. De la mateixa manera, una hipocicloide és la corba descrita per un punt fix a una circumferència que gira a l'interior d'aquesta. En funció de la relació entre els radis de la circumferència, es produeixen diferents tipus de corbes. Adjuntem a continuació la imatge del mòdul de les epicicloides i les hipocicloides del MMACA amb la descripció de l'apartat de la [web](#) de la sala Pere Puig Adam, sala de geometria.



Figura 36. Tauler amb un engranatge circular fix i un conjunt de peces circulars dentades. Si es fan rodar per l'interior, obtenim diverses hipocicloides. Si es fan rodar per l'exterior, obtenim les epicicloides

Format d'article inspirat en un model de Bonita Graham.

REFERÈNCIES

- [1] Castelnuovo, Emma; Barra, Mario. La cicloide. Castelnuovo, Emma, Barra, Mario. *Matematica nella realtà*. Turín: Bollati Boringhieri, 1976, pg 231-236. ISBN 88-339-5650-4
- [2] Il giardino di Archimede. *Pendolo cicloidale* [en línia] 2020. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Disponible a <https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/pendolocicloidale.htm>
- [3] Martin, John (2010). The Helen of Geometry. *The College Mathematics Journal* 41(1), 17-28. doi: 10.4169/074683410X475083
- [4] Whitman, E. A. (1943). Some Historical Notes on the Cycloid. *The American Mathematical Monthly* 50(5), 309-315. doi: 10.2307/2302830
- [5] School of Mathematics and Statistics University of St Andrews. *Cycloid* [en línia] 2020. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Disponible a <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Cycloid/>
- [6] Reventós, A. (2018). Evolutes. *Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM* (43) 8-23. Recuperat de <https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/102849>
- [7] Bruce, Ian. (2007). *Christiaan Huygens' Horologium Oscillatorium; Part Two B*. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de <http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart2b.pdf>
- [8] Bruce, Ian. (2007). *Christiaan Huygens' Horologium Oscillatorium; Part III*. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de <http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart3.pdf>
- [9] Rey, J., Udina, M. (2014) El Racó del mmaca: Epicicloides, hipocicloides i engranatges. *Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM*. (35) 131-137. Recuperat de <https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/86954>
- [10] de Icaza Herrera, M. (1994). Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problema. *Revista Mexicana de Física*. 40(3), 459-475. Recuperat de https://rmf.smf.mx/pdf/rmf/40/3/40_3_459.pdf.
- [11] Erlichson, H. (1998). Galileo's Work on Swiftest Descent from a Circle and How He Almost Proved the Circle Itself Was the Minimum Time Path. *The American Mathematical Monthly*, 105(4), 338-347. doi:10.2307/2589709
- [12] Babb, J., Currie, J. (2008). The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem. *The Mathematics Enthusiast*. 5(2) 169-184. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de <https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1099&context=tme>

- [13] Departamento de Física Aplicada, Universidad de Granada. (2020) *Galilei, Galileo. Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*. Recuperat de https://www.ugr.es/~physicaadlitteram/Galileo/N0003354_PDF_1_330.pdf
- [14] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. *The Brachistochrone Problem* [en línia]. 2002. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Disponible a <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/>
- [15] Weinstock, R. (1994). Isaac Newton: Credit where Credit Won't Do. *The College Mathematics Journal*, 25(3), 179-192. doi:10.2307/2687646
- [16] Apunts de l'assignatura *Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies* del curs 2019-2020 del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.
- [17] Ariotti, P. (1968). Galileo on the Isochrony of the Pendulum. *Isis*, 59(4), 414-426. doi: 10.1086/350426
- [18] de Guzmán, M. Universidad Complutense de Madrid. *Ecuaciones y demostraciones de las propiedades de la cicloide*. [En línia] 1999. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Disponible a <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/experimentosgeom/ecua.htm>
- [19] Lafuente, J. Apunts de l'assignatura *Geometría diferencial de curvas en el plano* del curs 1998 de la Universidad Complutense de Madrid. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas%20y%20Superficies/cp.pdf>
- [20] Montesdeoca, Á. *Apuntes de geometría diferencial de curvas y superficies* del curs 2004 de la Universidad de La Laguna. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de <https://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf>
- [21] Vargas, R. *Geometria diferencial. Problemas resueltos* del curs 2010 de la Pontificia Universidad Católica de Chile [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de <https://vargasmf.files.wordpress.com/2011/05/apuntes-de-geometria-diferencial1.pdf>
- [22] Macdonald, P. (2014). *The Brachistochrone Problem* [Diapositives]. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de <https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEproj/sp14/PaigeMcDonald/FinalDraft.pdf>
- [23] Gómez, G. Apunts de l'assignatura *Modelització* del curs 2018-2019 del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.
- [24] Haro Delicado, M.J., Pérez Haro, M.J. (2012). El problema de la braquistócrona y otros problemas de la Física como introducción al cálculo de variaciones. *Suma+*, 70(43-63). Recuperat de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/70/043-063.pdf>
- [25] Porter, F. (2018). *Calculus of Variations*. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de <http://www.hep.caltech.edu/~fcp/math/variationalCalculus/variationalCalculus.pdf>