mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Mòdul

Diagrama de Voronoi

Edat mínima recomanada

Cicle superior d'Educació Primària

Descripció del material

Tauló de 60x60x10 cm amb pius fixats i peces de colors que hi encaixen.

Descripció de l'activitat que es planteja

Donats uns punts del pla (marcats amb uns pius fixos en el tauló), es tracta de construir el Diagrama de Voronoi associat a aquests punts. Aquest diagrama és una divisió del pla formada per regions cada una de les quals conté tots els punts que estan més a prop d'un dels punts fixats inicialment.
L'activitat consisteix en col·locar les peces (que corresponen a les regions de mínima distància) en els llocs corresponents i completar el diagrama.
L'activitat es pot fer individualment o en grup.

Passes per assolir el repte proposat

- Primer observem que cada peça ha d'encaixar en un piu de manera que contingui tots els punts que estan més a prop de l'emplaçament triat que de qualsevol altre. Observem que les regions encaixen pel costat que el forat és més ample (si les posem del revés no encaixaran les peces).
- Triem dos dels punts fixos que siguin veïns. La línia que divideix els punts que estan més a prop de cada un dels pius conté els punts que estan a igual distància de dos o més punts fixos. Per tant les fronteres de les regions són una part de la mediatriu del segment que uneix els punts.
- Si anem traçant 'mediatrius' imaginàriament, podem anar deduint la forma de les regions associades a cada punt.

A partir d'aquestes reflexions, cal anar dissenyant un estratègia per completar el diagrama: es pot començar en una cantonada de la regió

inicial (dos costats de la frontera formaran un angle recte), o bé per agafar el pivot que sembli més separat que la resta (la regió que li correspongui serà la més gran) o al revés, etc
Observació: Les peces són de colors diferents per visualitzar millor el diagrama un cop completat. Això dóna una pista de com anar completant el diagrama si es pensa que dos peces de color igual no comparteixen cap costat.

Continguts que s'hi treballen

- Conceptes: Distància mínima, equidistància, proximitat, mediatriu, recta, frontera, conjunts, components, partició d'un pla, polígon …
- Metodologia: disseny d'estratègies, deduccions lògiques (descart o acceptació d'un encaix només per deducció), aprenentatge recursiu,...

Competències que es treballen

Competència matemàtica. Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen.
Competència d'aprendre a aprendre. Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i errors a cada pas.
Competència d'autonomia (en cas de treball individual).
Competències comunicativa lingüística i social (en cas de treball en grup).

Mòduls relacionats

- El diagrama de Voronoi dóna una tessel·lació del pla. Altres mòduls que treballen tessel·lacions són:
  - Tessel·lació de Penrose
  - Pentàgons
  - Tauler de Sam Loyd
- En el diagrama s'han usat 4 colors diferents per a les regions. Es pot enllaçar amb el Teorema dels quatre colors i el mòdul "Pintant la pilota".
- El diagrama permet una incursió a la Teoria de Grafs. Un altre mòdul que treballa amb grafs és el de "Camins hamiltonians".

Relacions amb la història

El diagrama porta el nom de Georgy Voronoi, i també s'anomena tessel·lació o descomposició de Voronoi o tessel·lació de Dirichlet (per Lejeune Dirichlet) [1].
Els primers diagrames d'aquesta tipologia que es coneixen foren usats per Descartes (1644) per mostrar la disposició de la matèria en el

sistema solar. També varen ser usats per Dirichlet (1850). Al 1854, John Snow va compondre un diagrama de Vornoi per mostrar que la majoria de les morts per còlera, en una epidèmia, s'havien produït al voltant d'un pou d'aigua concret. El 1908, Georgy Voronoi n'estudià el cas n-dimensional.
Els diagrames reben diferents noms depenent de la branca de la ciència o, més específicament, de la matemàtica, en què s'utilitzen. Així, en geofísica i meteorologia s'anomenen *polígons de Thiessen* (pel meteoròleg nord-americà Alfred Thiessen), en física de la matèria condensada s'anomenen *cel·les de Wigner-Seitz*, o en el cas de tractar-se d'un espai mètric en general s'anomenen *polígons fonamentals*.

Aplicacions

Els diagrames de Voronoi són fonamentals per als estudis de proximitat i per determinar àrees d'influència respecte uns punts fixats. Alguns exemples de problemes de proximitat:

- Trobar el parell de punts més propers d'entre tots els punts inicials fixats. Per detectar avions en perill de col·lisió.
- Trobar el centre del cercle de radi mínim que conté tots els punts fixats. Per ubicar serveis d'urgència, antenes de telefonia, repetidors de radio i televisió,...
- Trobar, en una regió determinada, el centre del cercle de radi màxim que al seu interior **no** conté cap punt dels fixats al principi. Per ubicar serveis no desitjats com abocadors.
- En meteorologia, per determinar àrees de precipitació, s'anomenen polígons de Thiessen.
- En geologia, per determinar àrees de presència d'un material (polígons d'àrea d'influència).
- En ecologia, per estudiar la supervivència d'espècies en competència per aliments o llum.
- En economia, per estudiar àrees de mercat de centres en competició.

En general, en qualsevol àrea amb un problema de proximitat o d'estudi d'àrees d'influència. I també es poden trobar aplicacions en cristal·lografia i en química, en l'estudi de propietats químiques d'alguns elements.

Activitats complementàries

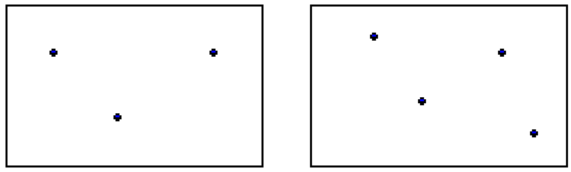
Tessel·lacions de Voronoi amb xarxes regulars

1) Comencem considerant 3 o 4 punts aleatoris dins una zona delimitada inicialment com a la figura. Podeu dibuixar el diagrama de Voronoi?

Resposta: dibuixeu les mediatrius per a cada dos punts veïns.

2) Els punts de les mediatrius estan a igual distància de ... punts fixats.

Els punts on es tallen les mediatrius (vèrtexs de les regions) estan a igual distància de ... punts fixats.

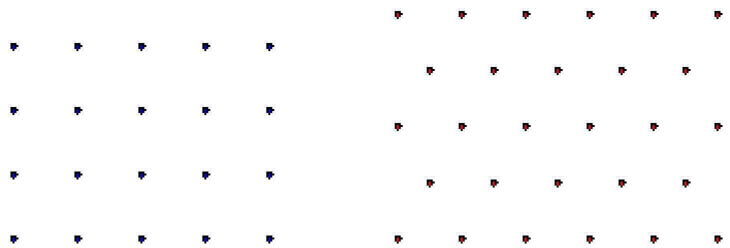


Resposta: dos en el primer cas, i tres o més en el segon.

3) Quants costats tenen les regions poligonals del diagrama?

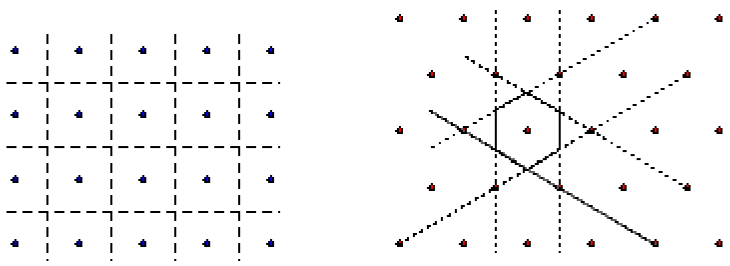
4) El conjunt de punts inicials (pius fixos) pot ser el conjunt de punts d'una xarxa regular de punts al pla o l'espai.

- Quines estructures s'obtindrien si agafem punts en una malla quadrada? I si els punts estan disposats de manera que formen triangles?



Malla quadrada Malla triangular

En aquest cas s'obtenen estructures regulars. En el cas de la malla quadrada, s'obtenen quadrats, i en el cas de la malla triangular....

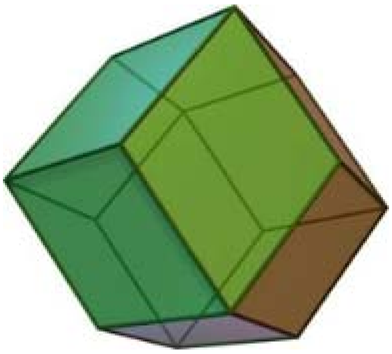


Malla quadrada Malla triangular

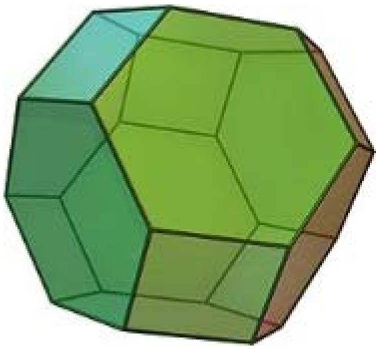
- Es poden obtenir també diagrames de Voronoi a l'espai. S'obtenen regions tridimensionals que emplenen tot l'espai.
- En aquest cas, com es poden obtenir les cares de cada una de les regions? Resposta: els plans mediatrius que contenen els punts que equidisten a dos de donats.
- Per tant si prenem punts equidistribuïts de manera que formin cubs, obtindrem també cubs com a regions del diagrama.
- Ara agafem com a punts fixos tots els vèrtexs dels cubs, afegim els punts que estan situats en els centres de les cares i busquem les regions del diagrama de Voronoi. Com seran aquestes

regions? Per començar a esbrinar la resposta hem de comptar, per a cada punt de la xarxa, quants punts 'veïns' té. Resposta: en té dotze. Per tant, tindrem 12 plans mediatrius delimitant cada una de les cel·les de Voronoi. A més les regions han de emplenar tot l'espai. Quins poliedres de 12 cares emplenen l'espai? Dodecaedres ròmbics.

- I si ara prenem els punts que estan en el centre del cub? Resposta: octaedres truncats.



Dodecadre ròmbic



Octaedre truncat

Teorema dels quatre colors

El teorema dels quatre colors estableix que tota partició del pla en regions contigües pot ser pintada amb només quatre colors de manera que dues regions adjacents no tinguin el mateix color.

- Observeu aquesta propietat en el diagrama de Voronoi.

Grafs

El diagrama de Voronoi crea un graf a partir de les fronteres entre les regions de la tessel·lació. Un graf és una estructura matemàtica formada per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arestes ([1]), cada una de les quals connecta dos vèrtexs. Els grafs admeten una representació gràfica en la qual els vèrtexs són punts i les arestes són línies contínues unint els punts.

En un diagrama de Voronoi, les línies divisòries entre les regions són les arestes del graf.

- Quins punts són els vèrtexs del graf? Resposta: els punts que estan a igual distància de tres o més punts fixos.
- Ara considerarem el graf dual del de Voronoi. Cada regió es representa per un vèrtex i dos vèrtexs estan connectats si les dos regions són veïnes.
- Mireu el plafó. Quina forma tenen les regions que s'obtenen amb les arestes del graf dual? Són triangles i el que obtenim és una triangulació anomenada de Delaunay [2].
- Per a cada triangle, en el gràfic del plafó, s'ha dibuixat el seu circumcercle. Podeu observar alguna propietat? Cap vèrtex queda dins de cap triangle.
- Considerant el graf dual, es poden passar per totes les regions movent-se per les arestes, sense repetir cap regió?
- Altres treballs amb grafs: el problema dels ponts de

Königsberg.

Per saber-ne més

El graf dual: la triangulació de Delaunay

Com hem dit, donat un diagrama de Voronoi, es pot construir una triangulació de Delaunay considerant el graf dual. Aquesta triangulació és única sempre, excepte quan els punts estan alineats i/o quan 4 o més punts del diagrama de Voronoi estan sobre el mateix cercle. En aquest últim cas, en fer el graf dual s'obté una regió que no és triangular (té 4 costats). Si es vol una triangulació, s'ha de triar una (o més) diagonal per afegir al graf.

Complexitat

Fixats *n* punts inicials, el nombre màxim de vèrtexs i arestes del graf de Voronoi és *2n-5* i *3n-6* respectivament.

El problema de trobar els dos punts més propers del conjunt inicial fixat té un cost computacional de $O(n^2)$ si no s'utilitza cap propietat geomètrica (només per força bruta). Aquests dos punts corresponen als extrems de l'aresta més curta del graf de Delaunay.

Generalitzacions

Les regions poligonals que s'obtenen s'anomenen de forma genèrica cel·les de Voronoi. Es poden obtenir diagrames d'ordre superior modificant-ne la definició. Donat un conjunt de punts fixats inicialment *S*, les cel·les es defineixen com el lloc geomètric dels punts que tenen *n* punts del conjunt *S* com als *n* veïns més propers. Amb aquesta definició també s'obté una divisió de l'espai.

També es poden utilitzar mètriques diferents de l'euclidiana. En aquests casos, però, no s'assegura que existeixi realment una tessel·lació de l'espai.

Una altra generalització s'obté mesurant distàncies a objectes que no siguin punts. En aquest cas les cel·les s'anomenen eixos mitjans ('medial axis' en anglès) o esquelet topològic, i s'utilitza en el reconeixement òptic de caràcters.

Més informació

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation
[3] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/voronoi.html
[4] http://wwwdi.ujaen.es/asignaturas/gc/tema5.pdf
[5] http://www-ma2.upc.es/~geoc/voronoi.pdf
[6] http://www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/