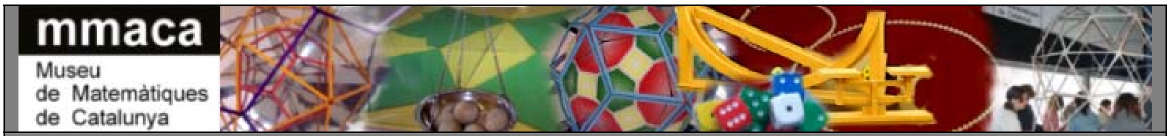

Mòdul

Cubs i nombres senars

Edat mínima recomanada

A partir de 1er d'ESO, tot i que alguns conceptes relacionats amb el mòdul es poden introduir al cicle superior de primària.

Descripció del material

15 peces de fusta, totes diferents, formades sempre a partir d'un nombre senar de cubs unitaris. Cartolina impresa amb les fotografies de les 15 peces i un espai per construir els cubs d'aresta 1, 2, 3, 4 i 5.

Descripció de l'activitat que es planteja

Veure que tot nombre cub s'obté com a suma de senars consecutius.

Passes per assolir el repte proposat

- Primer, observeu que les peces de fusta estan formades per cubs unitaris i que el nombre de cubs sempre és senar. Per tant, cada peça representa un nombre senar.
- Segon, col·loqueu cada peça al damunt de la seva fotografia. Observeu que les peces queden agrupades en 5 conjunts i que cada conjunt hi ha una peça més que a l'anterior.
- Finalment agrupeu les peces de cada conjunt per formar un cub.

Ràpidament s'observa que s'han pogut construir cubs d'aresta 1, 2, 3, 4 i 5 i per tant de volum 1, 8, 27, 64 i 125 respectivament. Aquest volum coincideix amb el nombre de cubs unitat que conté cada cub i donem significat geomètric a les potencies cúbiques dels nombres naturals.

Continguts que s'hi treballen

Nombres naturals, senars, potències, volum, equivalència entre potències terceres i volum, seqüències, iteració.

Competències que es treballen

- **Competència matemàtica**. Pels conceptes que es treballen, així com per l'ús de les tècniques geomètriques per representar els nombres i les seves propietats.
- **Competència d'aprendre a aprendre**. Pel procés constructiu de la solució.
- **Competència d'autonomia** (en el cas de treball individual).
- **Competència Comunicativa, lingüística i competència social** (si el treball és en grup).

Mòduls relacionats

- Quadrats i nombres senars.
- Suma cubs: $3^3+4^3+5^3=6^3$.
- Quadrats i cubs.
- Pesa cubs: cubs i balança
- Del octaedre al cub.

Relacions amb la història

Els primers indicis d'inducció matemàtica els podem trobar en la prova que fa Euclides sobre la no finitud dels nombres primers. Pel que fa a seqüències aritmètiques el mètode de demostració per inducció va ser introduït per al-Karaji al voltant de l'any 1000, el qual l'utilitzà per demostrar la fórmula del binomi. Aquest i altres matemàtics de l'època, com va ser el cas de Francesco Maurolico, que el 1575 va demostrar que la suma dels *n* primers nombres senars és $n^{2,}$ no van aplicar el mètode rigorosament. El primer en fer-ho va ser Pascal en *Traité du triangle arithmétique* (1665). La formulació moderna del mètode és del segle 19, amb les aportacions de Boole, Peano i sobre tot Dedekind.

Aplicacions

Activitats complementàries

El mòdul mostra com els primers 5 cubs (1, 8, 27, 65 i 125) es poden formar com a suma de nombres senars consecutius.

1. Escriviu per a cada un d'aquests nombres cubs els nombres senars que s'han de sumar per obtenir-los.

1 = 1
8 = 3 + 5
27 = 7 + 9 + ...

2. Quants nombres calen usar en cada suma per obtenir el cub corresponent?

Per l'1, en fa falta 1. Pel 2^3 en fan falta 2, pel 3^3 en fan falta 3, etc...

3. Sense fer cap càlcul, quants nombres necessitarem per fer el 6^3? I el 7^3? I el n^3?

4. Fem una mica d'extrapolació: podeu dir quins nombres senars calen per construir el 216 i el 343?

D'altra banda ens podem preguntar quina estratègia cal seguir per saber si un nombre és cub o no.

5. Agafeu el 1728. Sabríeu dir si és un nombre cub o no?

6. Descomponeu-lo en factors primers. Què observeu?

Per tant, si descomponem un nombre en factors primers i cada factor apareix repetit tres cops vol dir que és cub, i en cas contrari no.

De la mateixa manera que el mòdul explora la relació entre els nombres cubs i els senars, podríem fer el mateix amb el nombres quadrats o bé els nombres triangulars.

7. De fet, potser el més natural seria començar per veure que la suma dels primers n nombres naturals és un nombre triangular, tot i representant el triangle que s'obté.
Amb quadrats d'àrea unitat, construïu els triangles que representen els nombres:

3 = 1 + 2
6 = 1 + 2 + 3
10 = 1 + 2 + 3 + 4

Com podeu construir els triangles? Fent columnes de tantes peces com surt a les sumes.

8. Amb les mateixes peces que hem utilitzat per representar el triangle podem formar quadrats de costat 2, 3, … i observar que per construir-los necessitem 1+3, 1+3+5, …quadrats unitat, respectivament. Per tant, que tot nombre quadrat, n^2, s'obté sumant els n primers senars. Si en lloc de quadrats utilitzem cubs arribem al mòdul present.

També podríem pensar si podem trobar nombres naturals que es poden escriure com a suma de cubs de dues maneres diferents. Resulta que el més petit és el 1729. Aquests nombres es coneixen com a nombres d'Ardí-Ramanujan. Sembla mentida, o no, però n'hi ha infinits.

9. Comproveu que el 1729 es pot escriure de les dos maneres següents:
1729=123+13=103+93

10. Us atreviu a buscar com es poden escriure els 4104 i el 13832?

Resposta: 4104 =23+163=93+153, 13832=183+203=23+243.

Per saber-ne més

La inducció matemàtica és un mètode de demostració matemàtica que permet provar de manera rigorosa que un propietat és certa per a tot nombre natural. Primer cal provar que es compleix la propietat quan *n=1* (o pel primer valor de *n* pel qual la propietat sigui certa). Llavors suposem certa la propietat per un cert valor d'*n* fixat i provem que la propietat també es compleix pel següent valor de *n*.
Suposem que volem demostrar la següent propietat per a tots els nombres naturals n (fórmula de la suma dels n primers nombres naturals) : 1+2+3+…+n= $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Comprovem si és veritat per a n = 1.

Clarament, $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ara cal provar si el fet que la fórmula es verifiqui quan n=m implica que també ho farà quan n=m+1.

1+2+3+…+m+(m+1)=

$$\frac{m\cdot(m+1)}{2}+(m+1)=\frac{m\cdot(m+1)+2(m+1)}{2}=\frac{(m+2)\cdot(m+1)}{2}$$

Que coincideix amb la propietat per a n=m+1, tal i com volíem provar.

Finalment deixem una pregunta a l'aire.
Sabem que

$(x+1)^2=x^2+2x+1$, o de manera equivalent que $(x+1)^2-x^2=2x+1$.

Si sumen el terme de l'esquerra d'1 fins a n el resultat és

$(n+1)^2-1$ *(d'aquest tipus de suma se'n diuen telescòpiques).*

Fent el mateix al terme de la dreta tenim

$2(1+2+\ldots+n)+n.$

Per tant,

$$1+2+\ldots+n=\frac{(n+1)^2-(1+n)}{2}=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Pregunta, podem generalitzar aquest mètode per trobar la suma de les potencies m dels n primers naturals?

Més informació