



## Mòdul

Empaquetar cilindres.

## Edat mínima recomanada

Des dels més petits

## Descripció del material

Capsa de DM (una mena de fusta artificial) amb tres compartiments de mides diferents.

Molts cilindres de PVC de 32 mm de diàmetre.



## Descripció de l'activitat que es planteja

Cal intentar col·locar el màxim nombre possible de cilindres en cadascun dels tres compartiments de la capsa. Entre els tres compartiments es poden col·locar un total de 85 cilindres.

Quan es comença a fer proves de seguida es veu que hi ha dues disposicions que rivalitzen entre elles. Aquestes disposicions reben el nom de "triangular" i "quadrangular" i, amb una mica de manipulació, és molt fàcil adonar-se'n del perquè d'aquests noms (a la disposició triangular també se la pot anomenar hexagonal).

## Passes per assolir el repte proposat

Per aconseguir col·locar un total de 85 cilindres en els tres compartiments cal fer el següent:

- Col·locar 21 cilindres en el compartiment més petit fent servir la disposició quadrangular. Surt  $7 \times 3$  (7 files de 3)
- Col·locar 36 cilindres en el compartiment més gran fent servir la disposició triangular. Surt  $5 \times 4 + 4 \times 4$  (4 files de 5 i 4 files de 4)
- Col·locar 28 cilindres en el compartiment mitjà. En aquest cas podem fer servir qualsevol de les dues disposicions. Amb la quadrangular surt  $7 \times 4$  (7 files de 4). Amb la triangular surt  $4 \times 4 + 3 \times 4$  (4 files de 4 i 4 files de 3).

## Continguts que s'hi treballen

- Estudi de les diferents solucions d'un problema en funció de les condicions inicials.
- Enrajolament de superfícies amb mosaics.
- Extrapolació.
- Inscripció-circumscripció de figures geomètriques

### Competències que es treballen

- **Competència matemàtica:** perquè dóna peu a plantejar i intentar resoldre problemes similars tot modificant les condicions inicials.
- **Competència en el coneixement i interacció amb el món físic:** ja que la disposició natural de cilindres amuntegats per efecte de la gravetat és la triangular. Això dóna peu a analitzar el perquè.
- **Competència en autonomia i iniciativa personal:** perquè el mòdul ens convida a anar provant diferents situacions.
- **Competència en expressió cultural i artística:** perquè ens fa pensar en els mosaics.

### Mòduls relacionats

- Mosaics amb miralls.
- Perímetre, àrea i volum.

### Relacions amb la història

### Aplicacions

La disposició que trobem habitualment a la natura és la triangular (o hexagonal) [1] i un dels exemples més evidents ens el donen les abelles quan fan els seus ruscs. Però n'hi ha d'altres en camps totalment diversos, per exemple la geologia.



Si amunteguem molts cilindres un damunt de l'altre, per exemple tuberíes d'aigua en una empresa de materials per a la construcció, aquests es disposen de manera triangular enlloc de quadrangular, ja

que aquesta darrera disposició no és estable.



Uns pocs exemples de diferents aplicacions són els següents:

- Llapis de colors: si agafem un munt de llapis de colors amb una goma elàstica aquests es disposen seguint la configuració hexagonal i ho fan tant si són hexagonals com cilíndrics.
- El paquet de cigarretes en conté 20 i ho fa seguint la distribució triangular 7-6-7. Així s'aconsegueix empaquetar un número rodó de cigarretes (tècnica subliminal per tal que els fumadors fumin més) amb un disseny adequat a les butxaques.
- Capses d'ampolles: en caixes de coca-coles, cerveses i demás begudes, aquestes es disposen sempre de manera quadrangular. Ja hem vist que en el cas de compartiments petits és més efectiva la disposició quadrangular i una caixa de begudes massa gran pesaria massa.
- Emmagatzemar: amb la següent imatge no calen paraules:



### Activitats complementàries

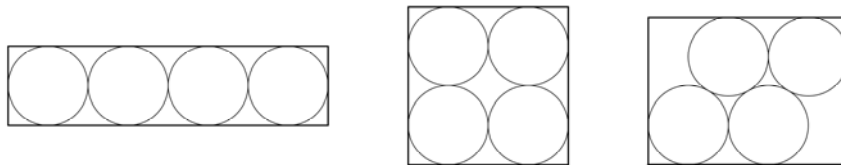
1) Podem modificar les concicions inicials del problema per donar lloc a solucions diferents: per exemple, modificant convenientment l'altura de la capsa podem aconseguir que la millor distribució dels cilindres sigui una combinació de les dues disposicions: quadrangular i triangular.

Resposta: en el compartiment petit n'hi ha prou amb augmentar l'altura de manera que hi puguem posar una renglera de dos en disposició triangular però no una renglera de tres en disposició quadrangular. En el cas del compartiment gran, si augmentem una mica l'altura podem disposar de manera quadrangular la filera de dalt de tot i augmentar en un cilindre la capacitat.

2) Fent dibuixos en un paper podem investigar quantes capsas diferents podem construir per col·locar-hi 3 cilindres sense que "ballin" tot seguint les disposicions quadrangular, triangular i combinacions d'ambdues. Podem anar augmentant el nombre de cilindres: 4, 5, 6... i anar dissenyant capsas diferents per tal de col·locar-los tots, sempre sense que ballin... ens trobarem més mides de les que ens esperem. Aquesta activitat es pot adaptar a nivells molt diferents si ens limitem a fer els dibuixos o bé si ens plantejem de calcular les mides de les capsas. Un cop dissenyades les capsas podem analitzar quina té el volum més petit, quina el té més gran, quina té més gran o més petita la superfície lateral, etc.

Resposta: Podem fer 2 capsas diferents per a 3 cilindres. 3 capsas diferents per a 4 cilindres. 4 capsas diferents per a 5 cilindres. 5 capsas diferents per a 6 cilindres... 11 capsas diferents per a 14 cilindres.

En el cas de 4 cilindres les 3 solucions són les següents:



Algunes qüestions més curtes:

1) Quin empaquetament seria el millor si la capsa fos molt gran?

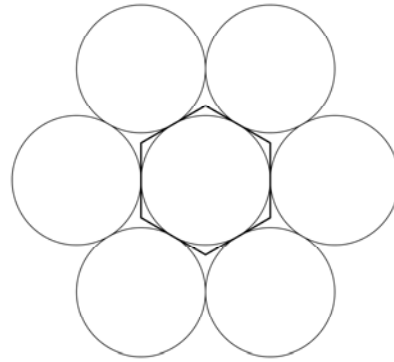
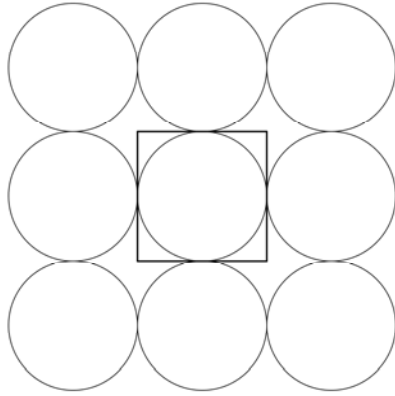
Resposta: L'empaquetament quadrangular aprofita millor l'espai a les vores de la capsa i l'empaquetament triangular aprofita millor l'espai interior de la capsa. Si la capsa és molt gran (en comparació al tamany dels cilindres) hi ha molta més proporció de cilindres a la part interior i la configuració triangular resulta ser més eficaç.

2) Si empaquetéssim esferes enlloc de cilindres quines disposicions tridimensionals obtindríem? quin nom els hi posaríem?

Resposta: disposició cúbica, disposició tetraèdrica i tenim una tercera disposició que donaria lloc a un prisma oblic de base quadrada.

#### Per saber-ne més

-Quina fracció ocupa un cercle inscrit en un quadrat? Quina fracció ocupa un cercle inscrit en un hexàgon?.



En la disposició quadrangular cada cilindre disposa d'una parcel·la quadrada tota per a ell. En el cas de la disposició triangular cada cilindre disposa d'una parcel·la hexagonal. A simple vista es veu que en el cas de la parcel·la hexagonal el cilindre disposa de menys espai i això vol dir que en podem col·locar els cilindres més "apretats". Fent uns pocs càlculs es comprova que el cercle ocupa una fracció de  $\frac{\pi}{4}$  del quadrat en el qual està inscrit, i això vol dir que aprofita aproximadament el 78'5% de la superfície.

En canvi si l'inscrivim en un hexàgon ocuparà una fracció de  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ , i això equival a aprofitar un 90'7% de la superfície.

-En una caps de dimensions infinites en quin percentatge millora l'empaquetament triangular al quadrangular?  
Si tenim en compte els resultats anteriors obtenim que l'empaquetament triangular millora aproximadament en un 15'5% l'empaquetament quadrangular en el cas en que les vores no comptin per a res (empaquetament infinit).

### Més informació

[1] <http://www.cienciateca.com/ctshexag.html>