mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

## Mòdul

Camins hamiltonians

## Edat mínima recomanada

A partir de 2n cicle d'ESO

## Descripció del material

Dodecaedre i rombododecaedre amb un suport per mantenir-los verticals i fixats a una base circular plana sobre la que hi ha peces allargades i imantades de la longitud dels costats dels poliedres i que poden adherir-se a ells.
Els costats dels dos poliedres són diferents, per tant, les peces que s'hi enganxen no són intercanviables.

## Descripció de l'activitat que es planteja

Es tracta de veure si es pot construir, sobre cada poliedre, un camí tancat (un cicle) sobre les arestes que passi per tots els vèrtexs només una vegada. No cal recobrir totes les arestes (si ho féssim passaríem pels vèrtexs més d'un cop).

Aquests camins s'anomenen hamiltonians. Si el camí és tancat (comença i acaba en el mateix vèrtex) s'anomena cicle hamiltonià.
L'activitat es planteja per fer individualment a priori, però també es pot fer en grup.

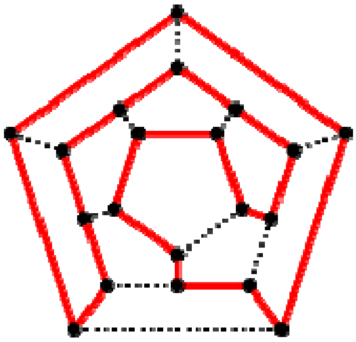
## Passes per assolir el repte proposat

No hi ha una estratègia fàcil. Una possibilitat és:

- Comenceu marcant un camí que recorri només els vèrtexs d'una cara (fàcil).
- Afegiu i modifiqueu aquest camí per incorporar els vèrtexs de una cara adjacent.
- Repetiu el procés fins a completar tots els vèrtexs (vigileu de no repetir-ne cap)

Fer aquesta construcció en el dodecaedre o obtenir la solució senzillament provant, és fàcil.

Es poden representar els vèrtexs i arestes del poliedre en un pla, de manera que ens queda un graf on és molt fàcil visualitzar la solució. Per exemple:



En canvi, en el rombododecaedre el problema no té solució (no existeix cap cicle hamiltonià). Aquest fet, en canvi, no és fàcil de demostrar.

## Continguts que s'hi treballen

Poliedre, camins, cicles, longituds, cares, arestes, vèrtexs, grafs,...

## Competències que es treballen

**Competència matemàtica.** Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen
**Competència d'aprendre a aprendre.** Pel procés constructiu de la solució.
**Competència d'autonomia** (en cas de treball individual)
**Competències comunicativa lingüística i la Comunicativa i la Social** (en cas de treball en grup)

## Mòduls relacionats

Altres mòduls que treballen qüestions i propietats relacionades amb grafs:

- El diagrama de Voronoi

Mòduls que treballen poliedres:

- De l'octaedre al cub
- Dodecaedre estrellat
- Dodecaedre
- Dodecaedre ròmbic

Altres mòduls

- Tot pintant la pilota

## Relacions amb la història

El nom de camí o cicle hamiltonià prové del matemàtic William Rowan Hamilton, qui va inventar el joc de trobar un cicle hamiltonià sobre el dodecaedre.

Pels voltants del 1800 es va convertir en un problema de gran interès gràcies al problema del viatjant (vegeu les aplicacions).

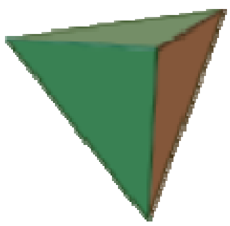
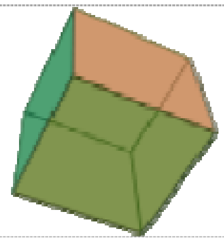
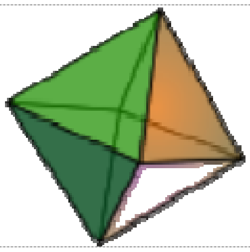
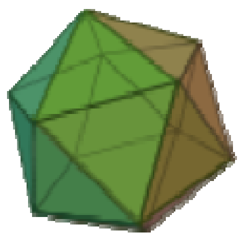
## Aplicacions

- El problema del viatjant o del carter. Un viatjant ha de visitar diferents ciutats. Quina ruta ha de seguir per visitar cada ciutat només un cop i que el viatge sigui el més curt possible? La solució és un cicle hamiltonià, tot i que un cicle hamiltonià no té perquè ser el que minimitzi la longitud total del camí.
- Una generalització de l'anterior és suposar que tenim N viatjants, que entre tots visiten totes les ciutats i aquestes només són visitades una vegada per algun viatjant.
- Una altra generalització és el problema d'assignació de ruta a una flota de vehicles que han de visitar un conjunt de clients (ciutats/llocs) i cada un d'ells té alguna especificació: en quant a càrrega màxima, tipologia de transport, finestres de temps d'entregues, etc...En tots els casos, es busca que la ruta total (la suma de les rutes de tots els viatjants o vehicles) sigui mínim.

Els problemes anteriors es troben en multitud de situacions: rutes comercials, repartiment de mercaderies, transport escolar, ....

## Activitats complementàries

- Preneu els sòlids platònics ([6]) i intenteu construir cicles hamiltonians:

| | |
|---|---|
|  |  |
| Tetraedre | Cub |
|  |  |
| Octaedre | Icosaedre |

- A l'apartat de 'Per saber-ne més' s'expliquen dos resultats que donen condicions suficients per garantir que un graf sigui hamiltonià a partir dels 'graus' dels vèrtexs.
  Per a cada poliedre, compteu els vèrtexs que té (aquest nombre el denotem com a n) i:
    - mireu quin és el grau de cada vèrtex (el nombre d'arestes que hi

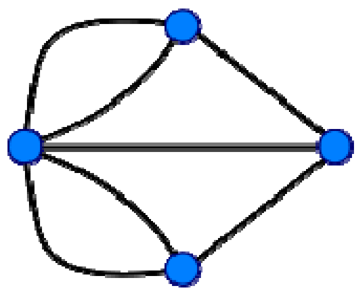
arriben o surten)

- comproveu que tots els vèrtexs tenen el mateix grau

• Comproveu

- que en el tetraedre tots els vèrtex tenen grau més gran que $\frac{n}{2}$ (i es pot aplicar el Teorema de Dirac).
- Que en l'octaedre, per a cada dos vèrtexs no veïns, la suma dels seus graus és més gran que n (i per tant aquí es pot aplicar el Teorema d'Ore).
- Que ni el cub ni l'icosaedre satisfan les dues propietats anteriors.

• Problema dels ponts de Koninsberg: ara demanem recórrer totes les arestes del graf, sense repetir-ne cap. D'aquest tipus de camins se'n diuen eulerians. El problema més famós correspon al dels ponts de Koninsberg (actualment Kaliningrad), ciutat amb 7 ponts que connecten dues lleres del riu i una illa central. Els vianants s'entretenien a buscar un recorregut que passes pels 7 ponts una única vegada (es pot començar i acabar al mateix punt o no, els problemes són lleugerament diferents). El diagrama de punts i zones de la ciutat es pot representar en el graf



**Per saber-ne més**

**Grafs**

Un graf és una estructura matemàtica formada per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arestes cada una de les quals connecta dos vèrtexs. Els grafs admeten una representació gràfica en la qual els vèrtexs són punts i les arestes són línies contínues unint els punts. Per exemple, els vèrtexs i les arestes dels poliedres es poden veure com un graf.

Un graf és hamiltonià si té algun cicle hamiltonià. Un graf és eulerià si existeix un cicle que recorri totes les arestes sense repetir-ne cap. Podem passar d'un graf hamiltonià a un d'eulerià (i al revés) canviant les arestes del primer per vèrtexs, i unint dos vèrtexs si les arestes inicials tenien un extrem en comú en el primer graf.

Existeixen resultats que donen condicions suficients per saber si un graf de n vèrtexs (amb n > 2) és hamiltonià:

- Dirac (1952): un graf simple és hamiltonià si cada vèrtex té grau igual o superior a $\frac{n}{2}$.

- Ore (1960): un graf simple és hamiltonià si per cada parell de vèrtexs no adjacents la suma dels seus graus és igual o superior a n.

Observeu que el graf pla que podem obtenir del dodecaedre no satisfà cap de les dues hipòtesis, i és hamiltonià. De fet, tots els sòlids platònics són grafs hamiltonians.
Tot graf complet (tots els vèrtexs estan connectats amb tots els altres) és clarament hamiltonià. Per tant, en el problema del viatjant, sabem segur que hi ha una solució que passa per tots els vèrtexs del graf. Però no es coneix un algoritme eficient per aquest problema que no sigui provar tots els camins hamiltonians possibles. El nombre de rutes creix ràpidament amb el nombre de vèrtexs a visitar. Per exemple, en un graf complet de n vèrtexs, el nombre de cicles hamiltonians és de $\frac{(n-1)!}{2}$.

## Més informació


[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path
[2] http://ca.wikipedia.org/wiki/Cam%C3%AD_hamiltoni%C3%A0
[3] http://www.sintef.no/static/am/opti/projects/top/vrp/
[4] http://web.telia.com/~u85905224/tsp/TSP.htm
[5] http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&name=HamiltonianGraph
[6]http://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron.svg