



Mòdul

Tessel·lació de Penrose

Edat mínima recomanada

Cicle superior d'Educació Primària

Descripció del material

Col·lecció de peces planes de fusta de dos tipus diferents: hi ha la forma 'd'estel' (tots els estels són iguals) i la forma de 'llança' (totes les llances iguals).

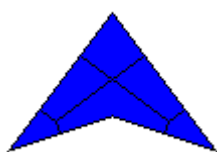


Descripció de l'activitat que es planteja

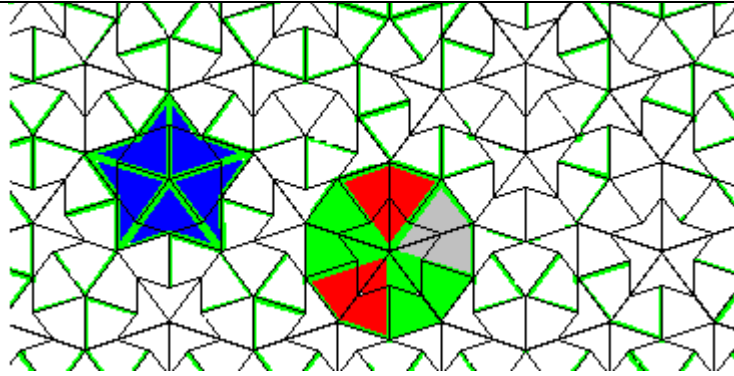
Usant les peces es pot enrajolar tot el pla. Es tracta d'anar col·locant les peces de manera que vagin encaixant i, sense deixar cap forat, enrajolar tot el pla.

Passes per assolir el repte proposat

Primer cal tenir clar que només hi ha dos tipus de peces: llances i estels.



Es comença al voltant d'una peça central, que es pot formar amb un dels dos tipus de peces. Mireu les dues peces marcades a la figura (una de color blau, i una altra marcada en verd-vermell-gris):



Atenció, cal que els colors i les formes dibuixades encaixin (aquí no s'han representat).

A continuació és convenient organitzar-se col·lectivament i per grups anar completant diferents zones al voltant de la part central.

Continguts que s'hi treballen

Polígons, tesselacions, costats, formes, regions, periodicitat, àrea, proporcionalitat, simetria, ...

Competències que es treballen

Competència matemàtica. Pels conceptes i metodologies matemàtics que es treballen.

Competència d'aprendre a aprendre. Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i errors a cada pas.

Competències comunicativa, lingüística i audiovisual. És una bona activitat per a treball en grup.

Mòduls relacionats

Altres mòduls que treballen tesselacions:

- Diagrama de Voronoi
- Pentàgons

Relacions amb la història

La història de les tesselacions és molt antiga. Hi ha moltes formes diferents d'enrajolar un pla usant unes poques formes diferents. Els mosaics àrabs en són un exemple ben conegut. El que tenen en comú la majoria de les tesselacions és que són periòdiques: hi ha un patró (una porció del pla) que es va repetint sempre.

L'any 1974, Roger Penrose va descobrir una tesselació no periòdica utilitzant exclusivament dos tipus de peces: les llances (en anglès *darts*) i els estels (*kites*). Per tal d'obtenir un mosaic que no fos periòdic, va

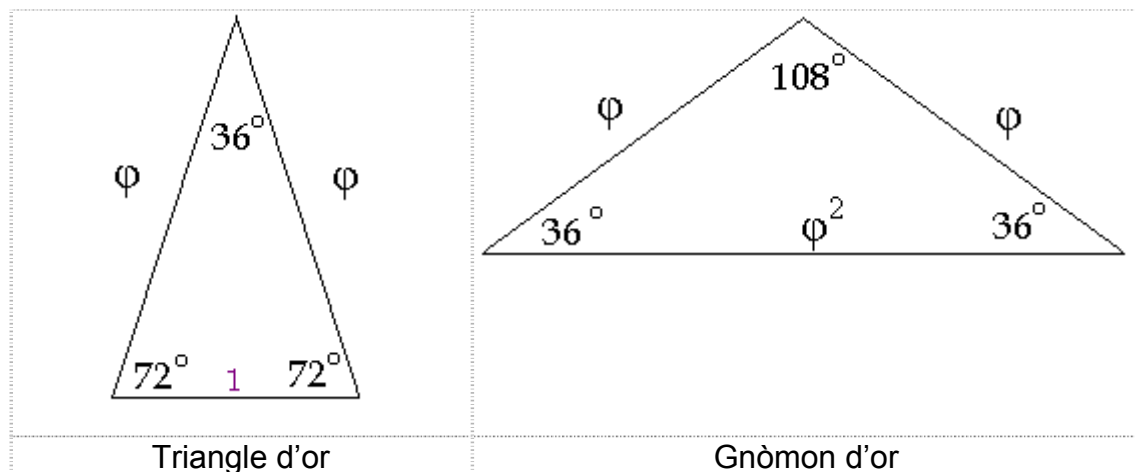
incloure marques i etiquetes de colors de manera que podien anar encaixant, però sense que es repetís cap part de l'enrajolat de manera periòdica.

Aplicacions

Activitats complementàries

- Preneu una peça de cada tipus. Encaixen bé? Quina figura formen dues peces juntes?
- Poseu les figures amb la part 'pintada' boca avall. Usant els rombes, podeu anar tesselant tot el pla? De fet, podeu anar construint pentàgons. D'aquesta forma s'obté una tesselació 'periòdica': el pentàgon es va repetint.
- Calculeu l'àrea de cada una de les peces. Com podeu fer-ho?
 - Podeu dividir cada peça en dos triangles iguals.
 - Com són cada un dels triangles en que podeu dividir cada peça?
- De cada un dels triangles anteriors, calculeu el quocient entre el costat llarg i el costat curt. Quin número surt?

Els dos triangles que s'obtenen de cada peça són isòsceles. En un cas s'obtenen dos triangles d'or, i en l'altre cas dos gnòmons d'or (s'anomenen així). I les proporcions dels costats sempre és el nombre d'or. Els teniu a les figures següents:

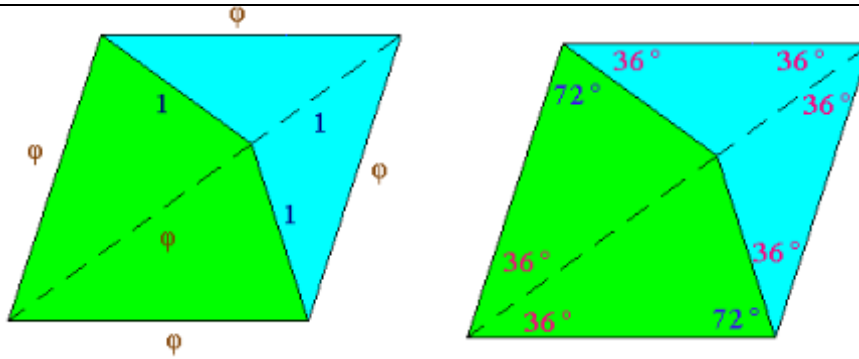


- Ara calculeu el quocient entre les àrees de les dues peces (la gran dividida per la petita). Quin número surt?

De nou hauríeu d'obtenir aproximadament el número: 1.618033..... que és el nombre d'or i acostuma a identificar-se amb la lletra grega φ . El

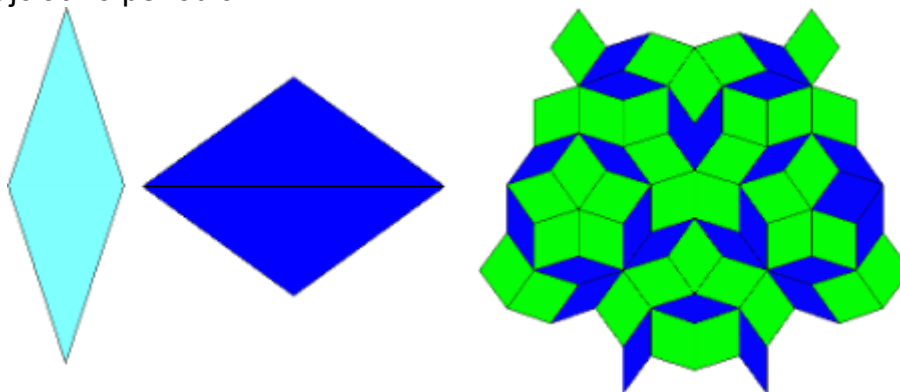
seu valor és $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- Ajunteu els triangles i observeu les propietats que hem dit.



(Les figures i propietats són extretes de [7])

- Si ajuntem els triangles de forma diferent, obtenim dos tipus de rombes diferents. En aquest cas, podrem tesselar el pla? Si, i també s'obté un enrajolat no periòdic.



Per saber-ne més

- La Tesselació de Penrose és aperiòdica. Si es prenen només les peces, surten pentàgons i la tesselació és periòdica. Si es vol evitar la periodicitat cal introduir dibuixos que encaixin en les peces.
- Les tesselacions periòdiques es basen en la repetició de patrons de manera recursiva. En el cas de la de Penrose, això no es pot fer.
- Es poden fer tesselacions d'aquest tipus amb col·leccions de peces de dues formes diferents, amb altres formes. Per exemple, usant dos tipus de rombes de mides diferents. (Però n'hi ha una infinitat d'opcions diferents, vegeu [4], [6],...)
- Johannes Kepler també va realitzar alguns treballs en tesselacions. Va ser un dels primers matemàtics a treballar els polígons estrellats, i va trobar una gran quantitat de maneres diferents de tesselar el pla usant polígons de tot tipus.

Més informació

- [1] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling
- [3] <http://www.quadibloc.com/math/pen01.htm>
- [4] <http://www.quadibloc.com/math/penint.htm>
- [5] <http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/aperiod.htm>
- [6] <http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/RAD-SPIR.HTM>
- [7] <http://www2.spsu.edu/math/tile/aperiodic/penrose/penrose2.htm>