Fórmules inductives

Josep Rey Nadal
Manuel Udina Abelló
Associació mmaca

En les exposicions del mmaca es presenten algunes fórmules inductives amb propostes que, tot i tenir l'aparença d'un trencaclosques més, ens ajuden a suggerir i entendre el paper de fórmules que, vistes sense cap manipulació activa, podrien semblar molt llunyanes. L'objectiu d'aquests mòduls no és tant que el visitant assimili la fórmula com fer-li viure una experiència d'aproximació a propietats numèriques amb suport geomètric.

1. Imparells i quadrats

Aquest mòdul que permet anar formant els successius quadrats dels nombres naturals tot afegint els successius nombres senars ajuda a visualitzar aquesta propietat que lliga la representació geomètrica dels quadrats amb propietats aritmètiques.

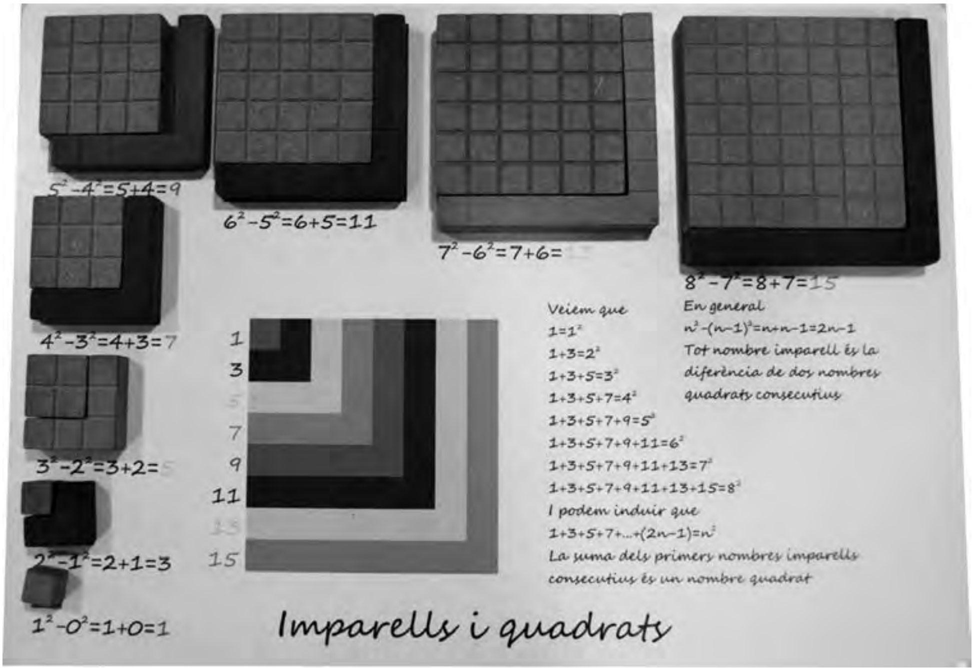
La suma d'imparells consecutius ens va donant els diferents quadrats. Això, que podríem veure-ho amb la fórmula de la suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = (1 + 2n - 1) \cdot n/2 = n^2,$$

ho visualitzem amb un mòdul en què els nombres senars estan representats en forma de L, de manera que ens permet comprovar com passar d'un quadrat al següent, o, dit d'una altra manera, que la diferència de dos quadrats consecutius és un nombre senar.

Aquest mòdul té molt poca dificultat de manipulació, però il·lustra prou bé (geomètricament) propietats numèriques bàsiques.

Una altra observació que es pot fer amb aquest mòdul és «veure» geomètricament que els quadrats dels nombres imparells sempre seran de la forma $4 \cdot k + 1$. Si partim de la peça unitat i l'anem rodejant amb les successives «eles», obtindrem els *nombres quadrats centrats* (o, dit d'una altra manera, els successius quadrats dels nombres imparells), que ens permeten



«veure» geomètricament la propietat esmentada. També es podria deduir treballant amb l'expressió del quadrat d'un nombre imparell, $(2n-1)^2 = 4(n^2-n)+1 = 4k+1$, amb $k = n^2-n$.

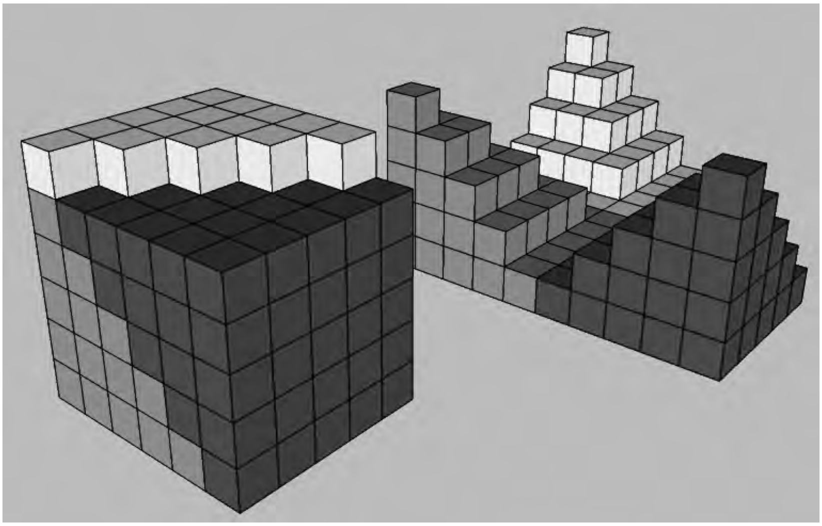
Una altra propietat aritmètica (implícita en l'anterior) que es pot il·lustrar amb aquest mòdul és que la suma de dos senars consecutius és múltiple de 4 (amb dues *L* consecutives es pot formar un quadrat).

2. Suma de nombres quadrats

Podem representar els quadrats d'uns quants nombres consecutius (a partir de l'1) com una «piràmide graonada» de cubs unitat en la qual cada pis té tants cubets com el quadrat corresponent. Si pensem en la descomposició del cub en les tres piràmides formades cada una per un vèrtex i una de les tres cares oposades a aquest vèrtex, podem intentar reconstruir el cub amb les piràmides de cubets i veurem que no és possible fer un cub perfecte, perquè una cara queda a mitges. Però, si partim de 6 d'aquelles piràmides, ja podrem formar l'ortòedre d'arestes n, n+1, 2n+1 (tot ajuntant les dues cares irregulars de les dues configuracions). Per tant, podem escriure

S_n (suma dels quadrats dels primers n nombres naturals) = $1/6n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$.

L'interès d'aquest mòdul és que no és trivial dur a terme la construcció, i així es dóna temps al visitant per entendre d'una manera manipulativa el significat de la fórmula. Tot i que molts visitants no llegeixen amb cura el que es proposa, el repte de construir l'ortòedre dibuixat és potent, i, atès que no surt «a la primera», observem que hi ha molts visitants que s'hi entretenen (o demanen ajuda) i quan aconsegueixen el repte n'estan prou satisfets.



Quan un visitant es bloqueja una mica intentant la construcció proposada, se li pot suggerir que, posant tres piràmides formant una *L*, es tracta de girar les dues dels extrems per completar la del mig. Si fossin piràmides no esgraonades ja tindríem el cub, però en haver-les «discretitzat» veurem com una de les cares queda migpartida. Fent un procés anàleg amb les altres tres podrem completar l'ortòedre.

Una altra observació que podem fer amb aquest mòdul és: si posem quatre de les piràmides esgraonades formant una piràmide conjunta, obtenim la suma dels primers quadrats de nombres parells. Per tant, si anomenem SP_n la suma dels quadrats dels n primers nombres parells, deduïm que

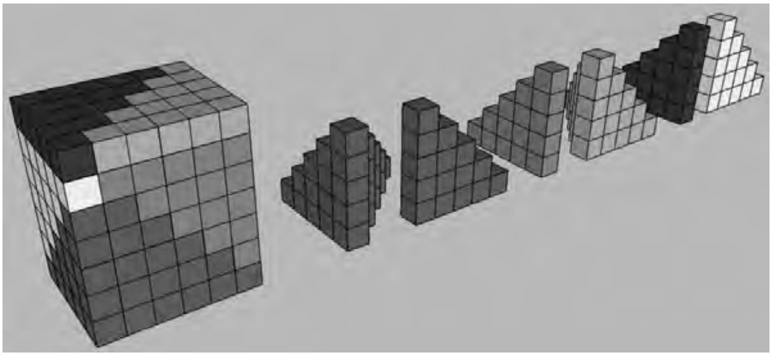
$$SP_n = 4 \cdot 1/6n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) = 2/3n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1).$$

I a partir de la fórmula per a la suma dels quadrats parells en podem deduir una altra per a la suma dels quadrats dels n primers nombres senars, que denotem per SI_n:

$$\begin{aligned} SI_n &= 1/62n \cdot (2n + 1) \cdot (4n + 1) - 2/3n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) = \\ &= 1/3(2n + 1) \cdot [4n^2 + n - 2n^2 - 2n] = 1/3n \cdot (2n + 1) \cdot (2n - 1) = 1/3n \cdot (4n^2 - 1). \end{aligned}$$

3. Suma de nombres triangulars

És un mòdul similar a l'anterior, però té l'interès afegit de presentar dues disposicions simètriques (enantiomorfes) dels diferents pisos de nombres triangulars. Hi ha peces «dextrogires» i «levogires» i es pot comprovar que en la disposició de la solució s'aparellen convenientment. De fet, una de les maneres de solucionar el puzle és construir les tres peces que agrupen dues a dues peces simètriques i obtenir una mena de piràmides formades de manera que a cada pis hi ha un rectangle (doble d'un nombre triangular) i amb les tres configuracions obtingudes podem fer un procés anàleg al descrit en el mòdul anterior (posar-les en *L* i plegar-les cap al mig).



L'ortòedre que es construeix (de $5 \times 6 \times 7$) es pot «obrir» en les tres direccions i en dos dels casos s'obtenen configuracions esgraonades simètriques.

4. Imparells i cubs

És un mòdul diferent dels anteriors perquè, més que utilitzar la inducció, aprofita una propietat dels nombres senars, que, agrupats consecutivament de n en n, permeten «construir» els cubs successius. Els primers grups són $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \ldots$ Per exemple, a partir de peces de 13, 15, 17 i 19 cubs construïm el cub de 4 (la mitjana d'aquests nombres és 16 i és com si tinguéssim 4 setzes). Hem optat per fer els agrupaments de cada nombre amb formes irregulars perquè la resolució dels puzles sigui més entretinguda. Després 21, 23, 25, 27, i 29 permetrien formar el cub de 5, i així successivament. El cub de qualsevol nombre k es construiria amb k peces.

També en aquest mòdul es visualitza geomètricament una propietat numèrica, i es pot considerar el paper que juga la mitjana dels nombres de cada grup, que correspon a un dels pisos del cub a formar.

5. Quadrats i cubs

Es tracta de comprovar la validesa de la fórmula

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

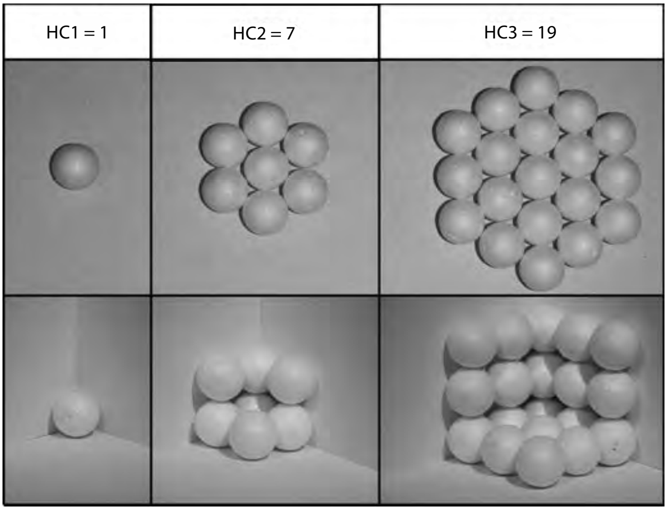
tot desplaçant les peces que ens permeten passar d'una configuració a l'altra.

De fet, la «demostració» d'aquesta propietat equival a l'observació que els diferents pisos d'un cub format a partir dels quadrats d'un nombre seguint la pauta indicada corresponen als que poden ocupar la franja en forma de *L* que permet passar d'un *n* al següent. És d'interès observar la diferència entre els cubs dels nombres parells (cal partir un dels pisos) i els dels senars. Aquest és també un mòdul amb poca dificultat pràctica, però que il·lustra una propietat aritmètica una mica sorprenent.

6. Nombres hexagonals centrats

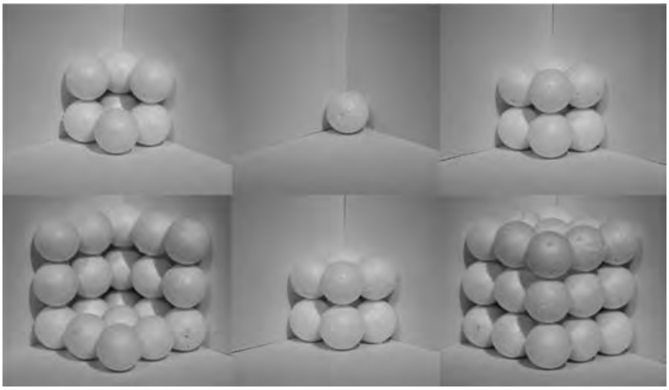
I per acabar aquesta passejada per fórmules inductives numèriques amb el seu correlat geomètric volem citar el mòdul que tracta amb els nombres hexagonals centrats. Aquests nombres juguen amb els cubs consecutius un rol similar al que hem vist que fan els imparells amb els quadrats. *En el moment d'escriure aquest article el mòdul encara està en preparació.*

Així com els nombres imparells es poden disposar en forma de *L* de braços iguals, els nombres hexagonals centrats es poden disposar en tres cares que concorren en un vèrtex d'un cub tal com es veu a la il·lustració següent:



I així com una *L* (nombre imparell) permet passar d'un nombre quadrat al següent, un nombre hexagonal centrat disposat d'aquesta manera permet passar d'un nombre cúbic al següent, tal com es veu a la il·lustració següent, en què es palesa que

$$HC2 + 1^3 = 2^3 \text{ i que } HC3 + 2^3 = 3^3:$$



També es pot apreciar que, anàlogament al fet que la suma d'imparells consecutius a partir d'1 dóna un nombre quadrat, la suma d'hexagonals centrats consecutius a partir d'1 dóna un nombre cúbic.

Una manera senzilla de representar amb material els nombres hexagonals centrats s'aconsegueix si es pot disposar d'una certa quantitat de llapis hexagonals. El primer nombre, l'1, es representaria amb un llapis; el segon, 7, contindria el llapis inicial i sis llapis més que el rodegen, i així successivament obtindrem els HC 1, 7, 19, 37, 61,... que, sumats, van donant els cubs successius: 1, 8, 27, 64, 125, ...