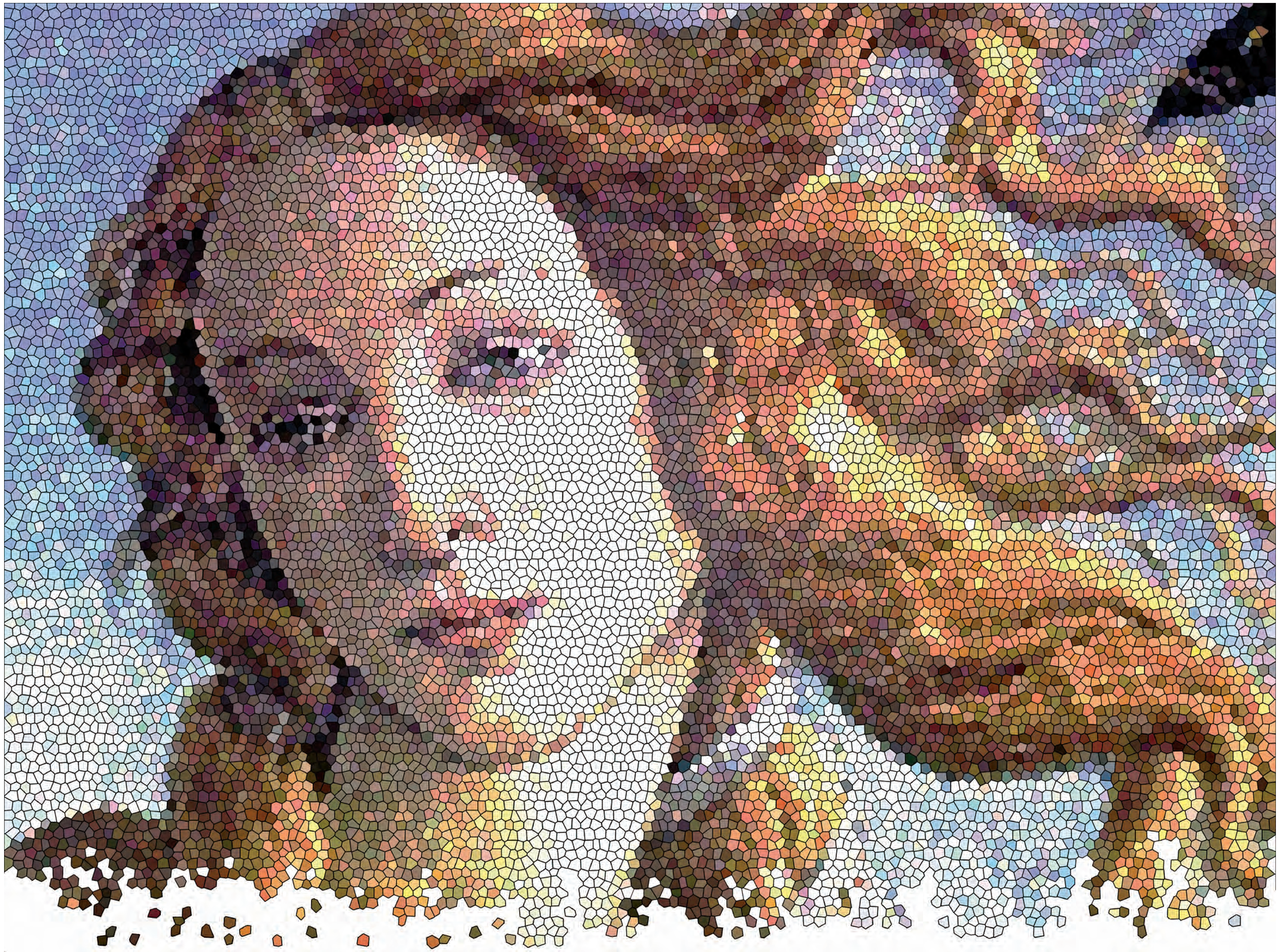
Martemàtiques



Una exposició de Fernando Corbalán

Presentació

Les Matemàtiques són part consubstancial de la cultura. S'han desenvolupat en paral·lel amb la resta dels coneixements humans, han influït i són influïdes per les altres disciplines, en particular per l'art. Una mostra del reconeixement de la seva importància social és que l'assignatura de Matemàtiques és l'única que s'estudia en els sistemes educatius de tots els països del món i en tots els nivells educatius obligatoris.

Però aquesta situació que sembla un privilegi, resulta no ser-ho quan s'analitza la realitat escolar diària de l'ensenyament de les Matemàtiques. Malgrat els canvis recents, l'atenció exagerada a la pràctica dels algoritmes de càlcul i la prioritat en els aspectes necessaris per continuar estudiant Matemàtiques en els cursos següents, ha donat lloc a una percepció social de les Matemàtiques com quelcom apartat de la realitat, tancat a les aules, amb poca relació amb altres coneixements i aïllades de la vida quotidiana.

D'aquesta manera, les Matemàtiques, que sempre han estat part essencial de les Humanitats, amb la generalització del seu estudi en els països del primer món (on arriba a la totalitat de la població), han acabat percebent-se com quelcom aliè a allò que s'entén com a Cultura. A més, tampoc solen aparèixer als mitjans de comunicació, excepte en comptades ocasions (sobretot quan fallen: enquestes electorals errònies, sortejos injustos, models socials incorrectes...), en contraposició amb el que passa amb altres ciències. Per tant, si no s'educa la mirada per reconèixer-les en l'entorn diari, poden acabar sent un saber amb un interès únicament escolar.

Des de fa força temps s'estan fent arreu del món, i també al nostre país, molts esforços en la millora de l'ensenyament de la Matemàtica per tractar d'integrar-ne els coneixements i la interdisciplinarietat, així com per la divulgació dels resultats matemàtics i per mostrar la seva aplicació en els diversos àmbits socials. Això ha donat com a resultat avenços significatius en la cultura general, i de la científica en particular, que contribueixen a trencar aquesta errònia i acomodatícia situació de pensar que hi ha dues cultures (literària/humanística i científica/tecnològica) que coexisteixen sense mesclar-se i que són, no poques vegades, antagòniques.

En la línia de trobar nexes d'unió es desenvolupa MartEMÀTIQUES, que tracta de mostrar com les Matemàtiques i l'Art s'han relacionat al llarg de la història i com ho segueixen fent en l'actualitat. Encara que sembla que no hi hagi gaires connexions, la veritat és que només n'hem triat algunes, entre les moltes possibles, i hem intentat que les triades siguin atractives i alhora significatives. No volem tancar camins o esgotar possibilitats, sinó obrir vies que poden ser recorregudes amb posterioritat pels interessats.

Un dels objectius del Congrés Català d'Educació Matemàtica del 2020 és donar presència social a les matemàtiques. En aquest context, l'APMCM amb l'ajuda de la Fundació Reddis i l'assessorament del MMACA presenta aquesta traducció al català de la versió actualitzada de l'exposició «Martemàtiques».

Desitjaria acabar oferint MartEMÀTIQUES a tots els visitants, però en especial a tots els alumnes i les alumnes i al professorat, tant de Matemàtiques com d'Art o d'Expressió Plàstica i Visual, amb el desig que en gaudeixin i que sigui l'inici o la continuació d'un fructífer i plaent recorregut intel·lectual per un dels territoris comuns entre l'art i les matemàtiques: la bellesa.

Fernando Corbalán

Disseny i maquetació Ana Maketa [www.anamaketa.net]

Traducció Versus Linguistic Solutions [www.versus.cat]

1 Cerca de la bellesa:
Territori comú d'art i matemàtiques

Les matemàtiques són l'arquetip de la bellesa del món.
Johannes Kepler, astrònom (1571-1630)

«Un matemàtic, igual que un pintor o un poeta, és un constructor de configuracions. Si les seves configuracions gaudeixen de més perdurabilitat que les construïdes pels altres homes és gràcies al fet que el seu material bàsic són les idees [...]. Un matemàtic no treballa amb altre material que amb idees i, en conseqüència, és summament probable que les configuracions que construeixi pervisquin durant molt de temps, perquè les idees envelleixen més lentament que les paraules. Les configuracions construïdes per un matemàtic, de la mateixa manera que passa amb les d'un pintor o un poeta, han de posseir bellesa; les idees, els colors i les paraules han d'acoblar-se de manera harmònica. La bellesa és la primera pedra de toc; al món no hi ha lloc permanent per a les matemàtiques desagradables des del punt de vista estètic».

Godfrey H. Hardy, matemàtic (1877-1947)

«Les equacions són importants per a mi, perquè la política és per al present, però una equació és quelcom per a l'eternitat».

Albert Einstein, físic (1879-1955)

«El nombre provoca la meva imaginació, la potencia, l'activa i l'exalta. La seva activitat es nota en el cos, en els sentits, provoca imatges noves [...]. Li puc dir que totes les meves obres des del 53 estan conscientment relacionades amb el nombre, procedeixen d'ell».

Pablo Palazuelo, artista (1915-2007)

«Que proper que es troba el procés de creació científica de l'artístic! Artistes i científics compartim no només el procés sinó també moltes ambicions: l'ambició de la universalitat, de bellesa, de coherència, de rigor, d'aconseguir l'elegància i concisió d'una fórmula matemàtica [...]. Ens sentim molt pròxims, però mentre els científics generen certeses peribles, els artistes intentem comunicar [...] dubtes eterns».

Oscar Tusquets, arquitecte i dissenyador

«La simetria, tant si es defineix en un sentit ampli com restringit, és una idea per mitjà de la qual l'home de totes les èpoques ha tractat de comprendre i crear la bellesa, l'ordre i la perfecció».

Hermann Weyl, matemàtic (1885-1955)

«Les formes que expressen més bé la bellesa són: l'ordre, la simetria, la precisió».

Aristòtil, filòsof (384-322 aC)

«Les lleis de la simetria són una de les més riques fonts de la creació artística».

Maurits C. Escher, artista (1898-1972)

«Els matemàtics potser generen certeses eternes i els agrada creure que els seus dubtes són peribles».

José Luis Fernández Pérez, matemàtic

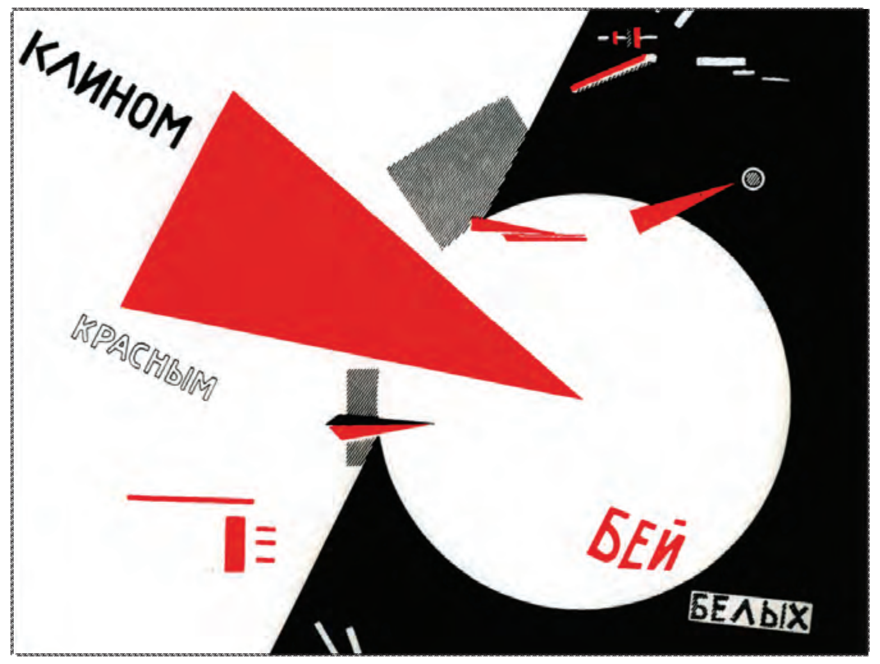
2 Figures elementals

La geometria és com un teclat de llenguatge gràfic: corbes, regulars o no, rectes, angles, circumferències, arcs són els pocs elements universals amb què es pot expressar tot.

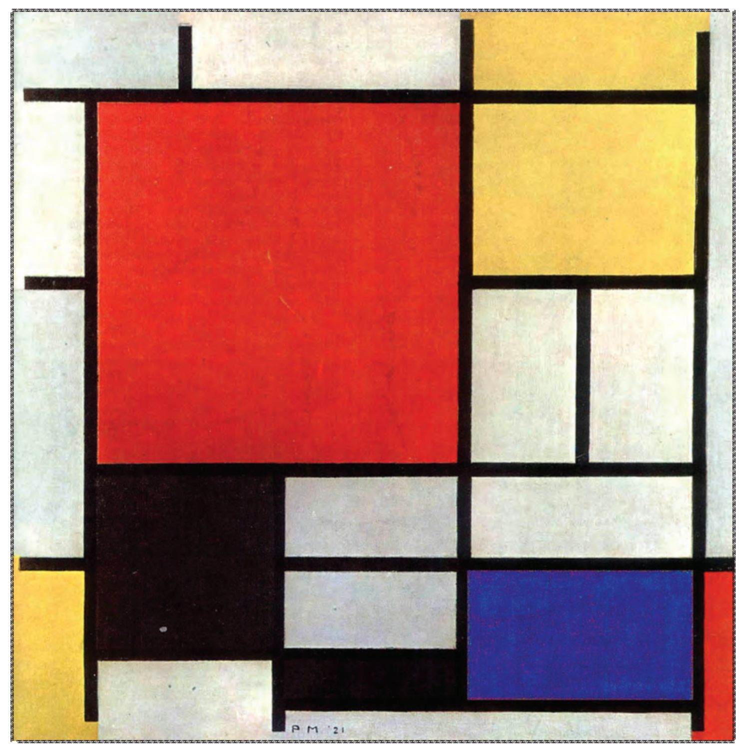
J. Torres-García

Les figures elementals (rectes, triangles, quadrilàters, cercles...) apareixen de vegades directament en pintures, dibuixos, gravats... I constitueixen el nucli fonamental d'alguns quadres i moviments pictòrics.

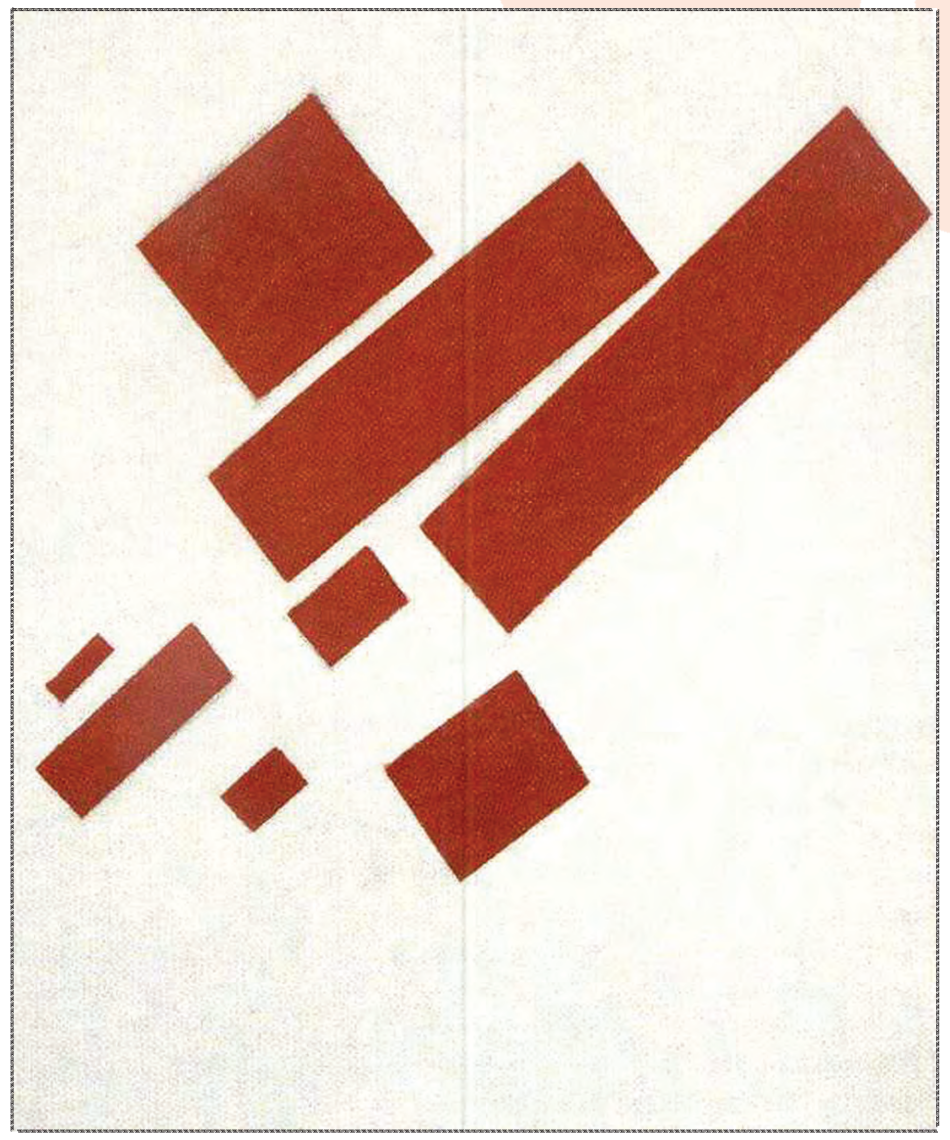
Aquí en tens exemples representatius.



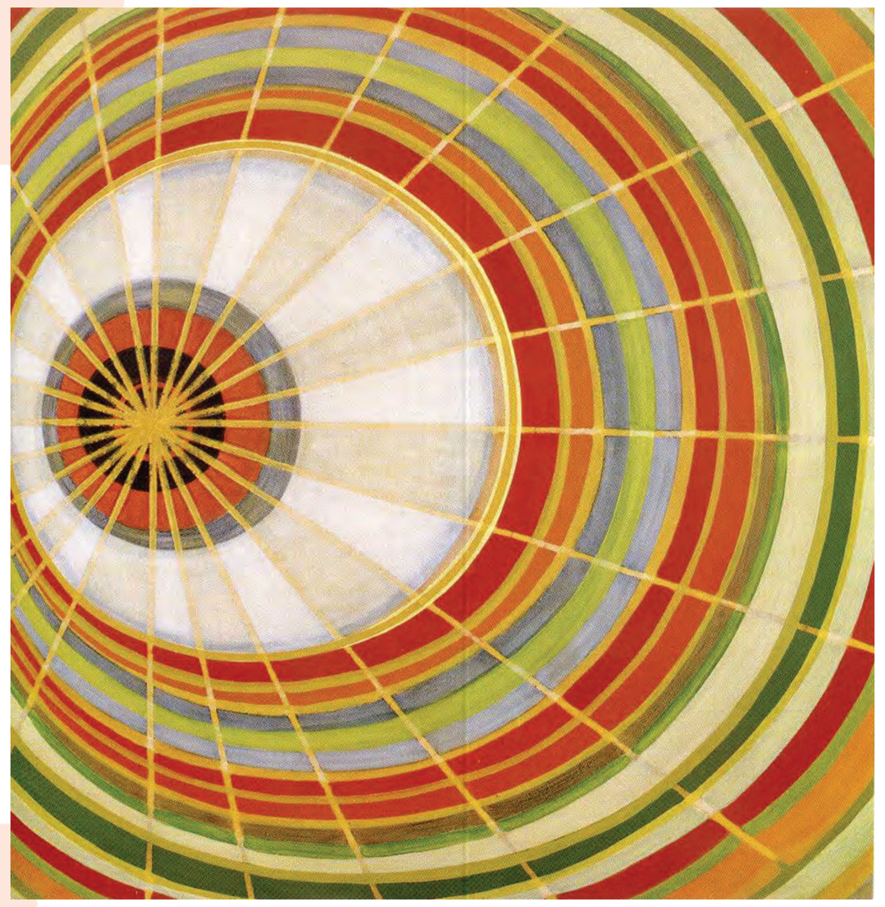
Cop als blancs amb la falca roja.
Lissitzky, *1919.*



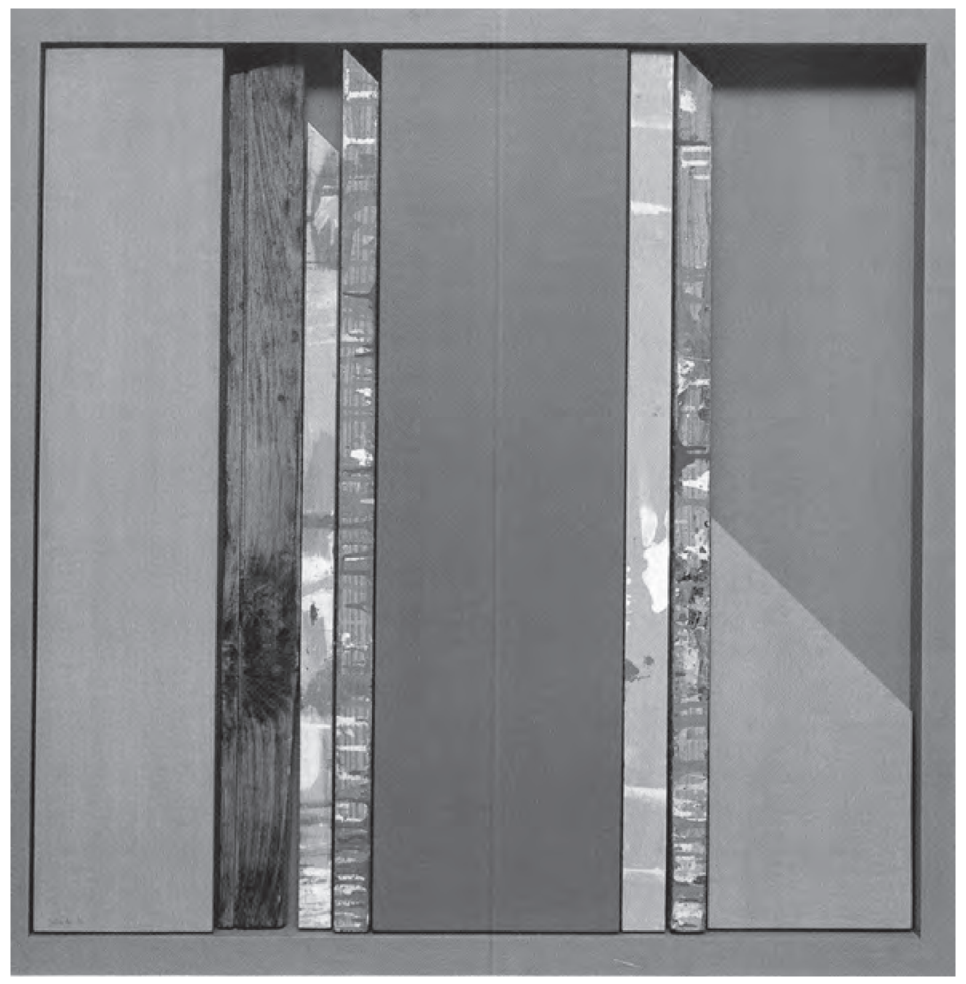
Composició.
Piet Mondrian, *1921.*



Suprematisme (amb vuit rectangles).
Malevich, *1915.*



If then III.
Charo Pradas, *1994.*



Allistat i diagonal.
Gerardo Rueda, *1990.*

Paris Review Poster.
Roy Lichtenstein, *1966.*

Martemàtiques

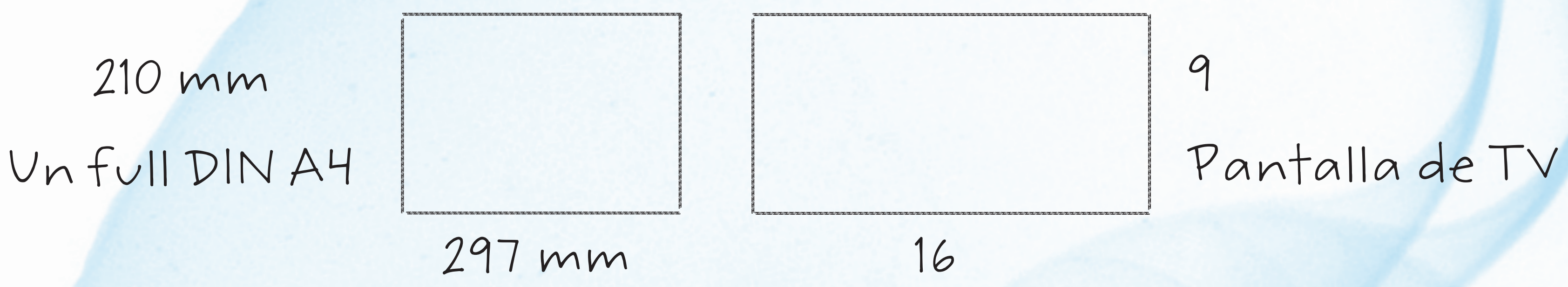
3 La raó àuria

A tu, presó feliç de la retina,
àuria secció, celeste quadratura,
misteriosa fontana de mesura
que l'univers harmònic origina.

Rafael Alberti

Tots els rectangles són iguals? Segons com es miri...

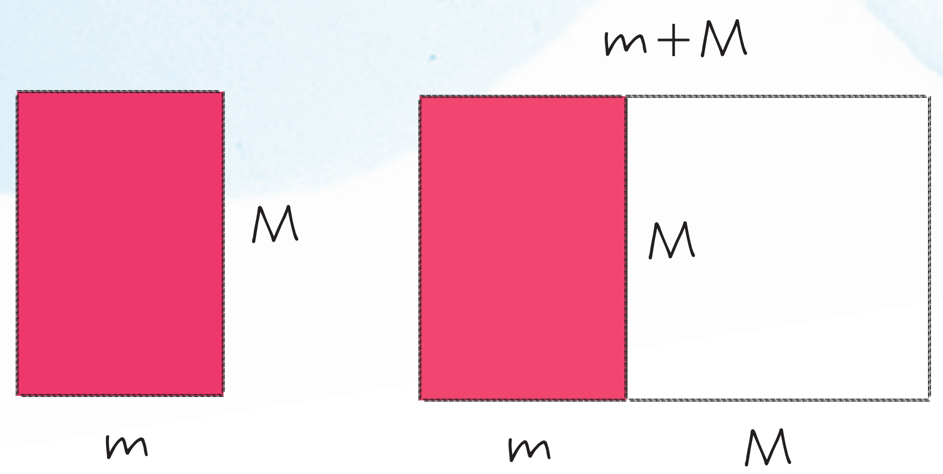
S'accepta que ho són aquells en què la relació entre els seus costats és la mateixa. Per exemple, els rectangles de la figura següent NO són iguals:



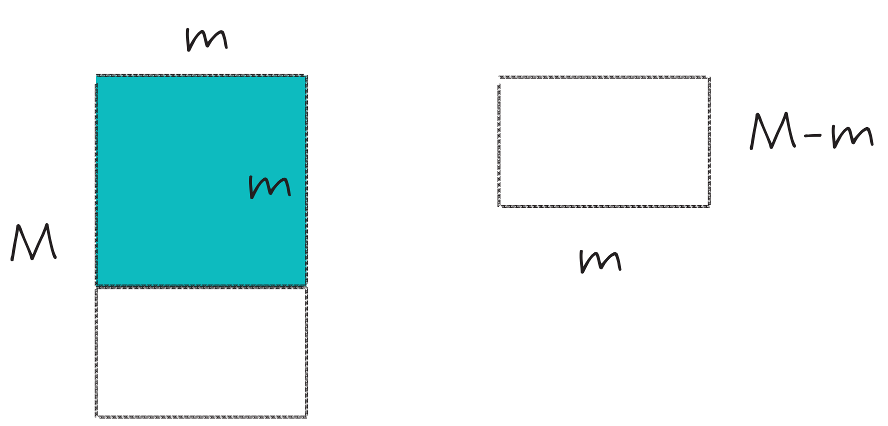
Veurem un rectangle molt important en la història i present de l'Art: el rectangle auri (RA).

Un rectangle és AURI quan en afegir-li un quadrat de costat igual al major dels seus costats n'obtenim un altre de la seva mateixa forma. I quan en treure-li un quadrat de costat el menor dels seus costats, també se'n conserva la forma.

El quocient entre el costat major i el menor d'un RA s'anomena *nombre auri* Φ.

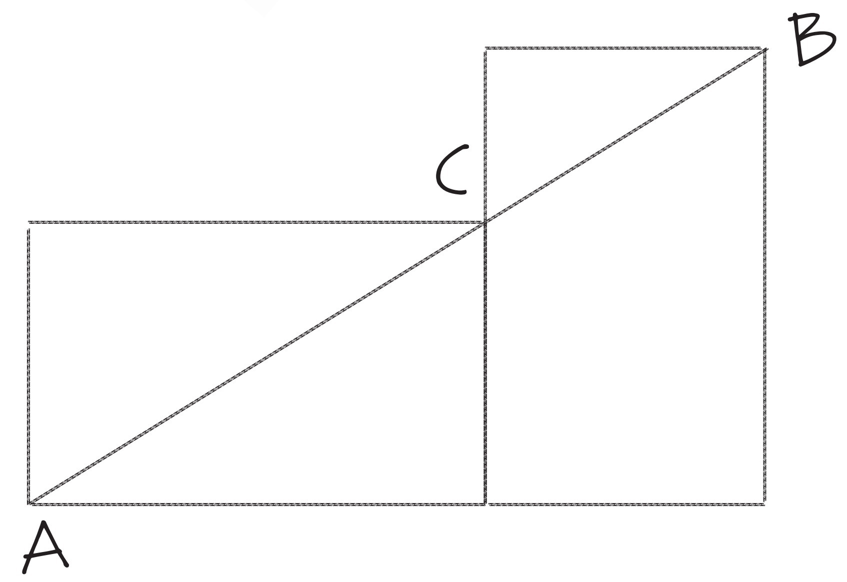


$$\rightarrow \frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \phi$$



$$\rightarrow \frac{M}{m} = \frac{m}{M-m} = \phi$$

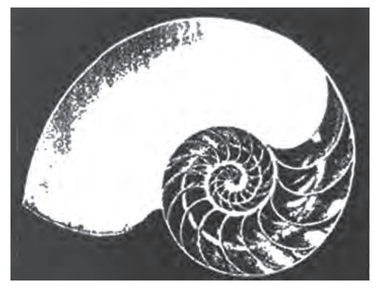
Si un rectangle és auri, en col·locar-lo com indica la figura i traçar AB, passem per C.

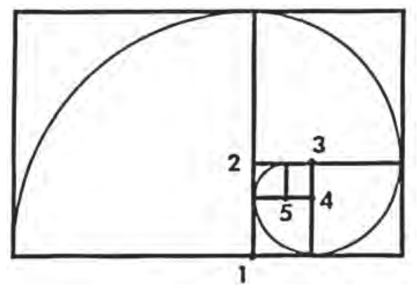


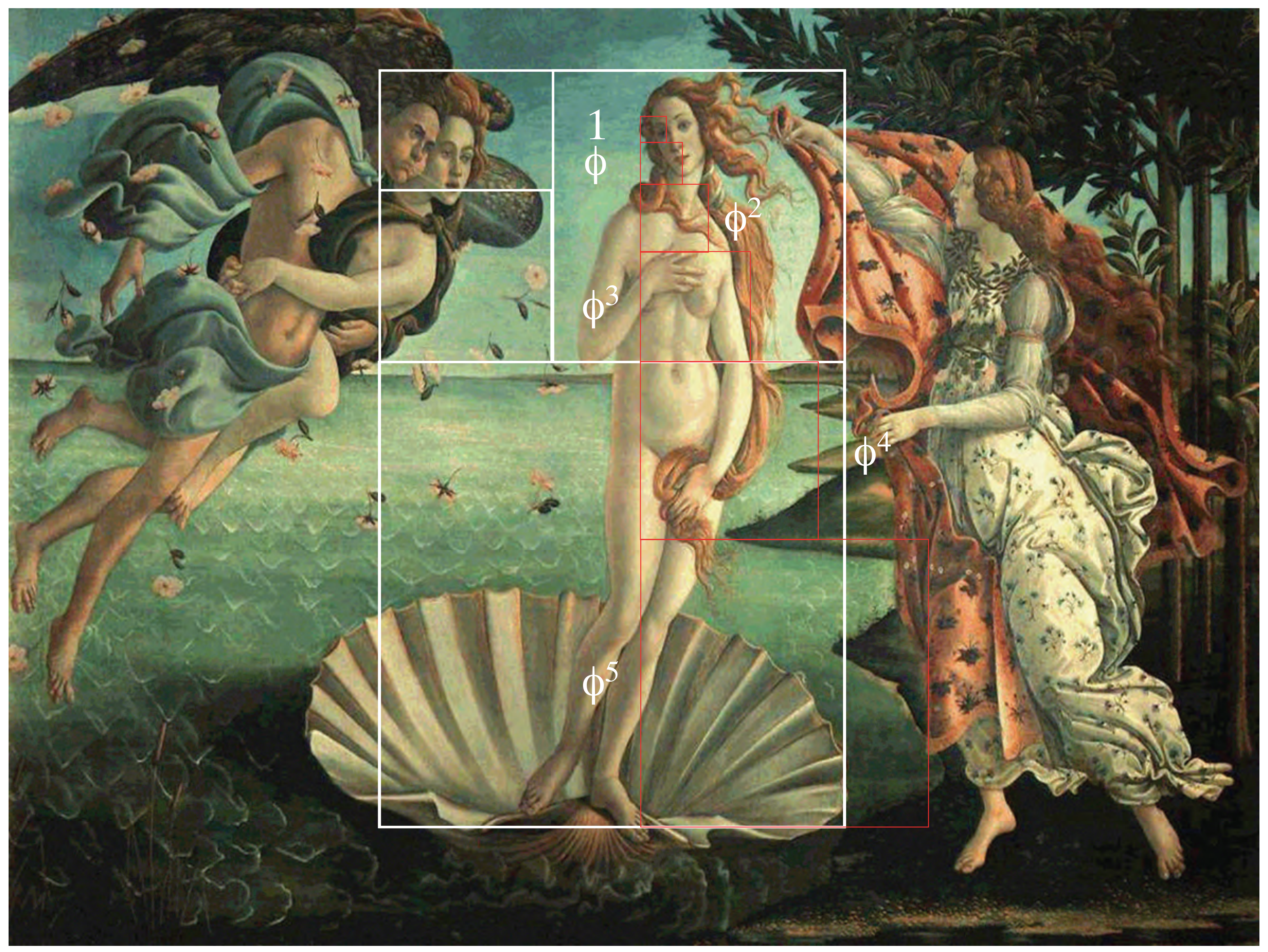
Com veus, això és el que passa amb les targetes de crèdit: són rectangles auris.

4 On apareix la raó àuria

Augmentar afegint quadrats per passar d'un rectangle auri a un altre permet créixer conservant la forma.

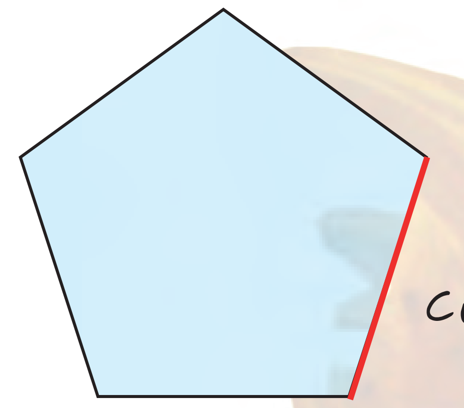


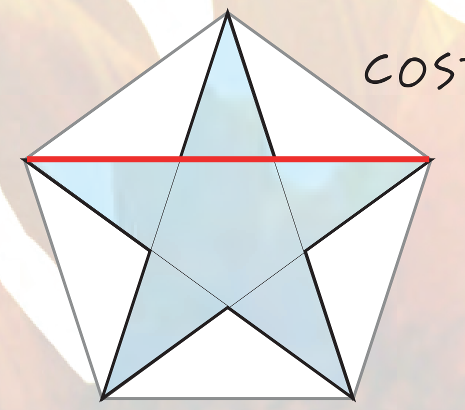




Naixement de Venus de **Sandro Botticelli**.
El matemàtic T. Cook va descriure algunes relacions àuries com les que es mostren.

La raó àuria Φ ens la trobem en llocs insospitats.





$$\text{Relació} = \frac{\text{costat estrella}}{\text{costat pentàgon}} = \frac{m}{l} = \phi$$

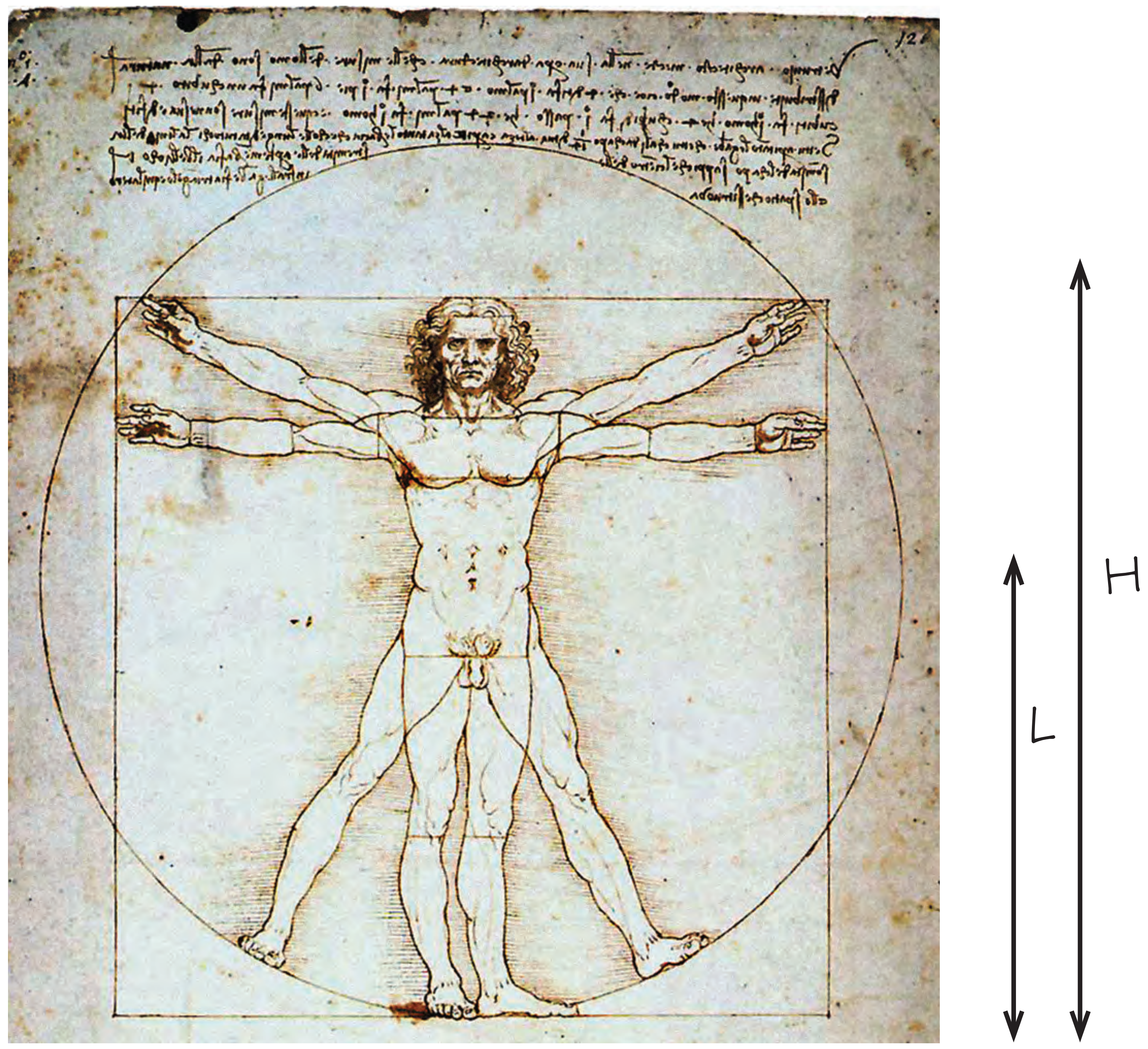
El pentàgon estrellat s'ha utilitzat moltes vegades en composicions pictòriques.

Leda Atòmica.
Salvador Dalí, *1949.*

Martemàtiques

5 Persones ideals... de grandària

Que no em llegeixi qui no sigui matemàtic.
Leonardo da Vinci
(inici del *Tractat de la pintura*)

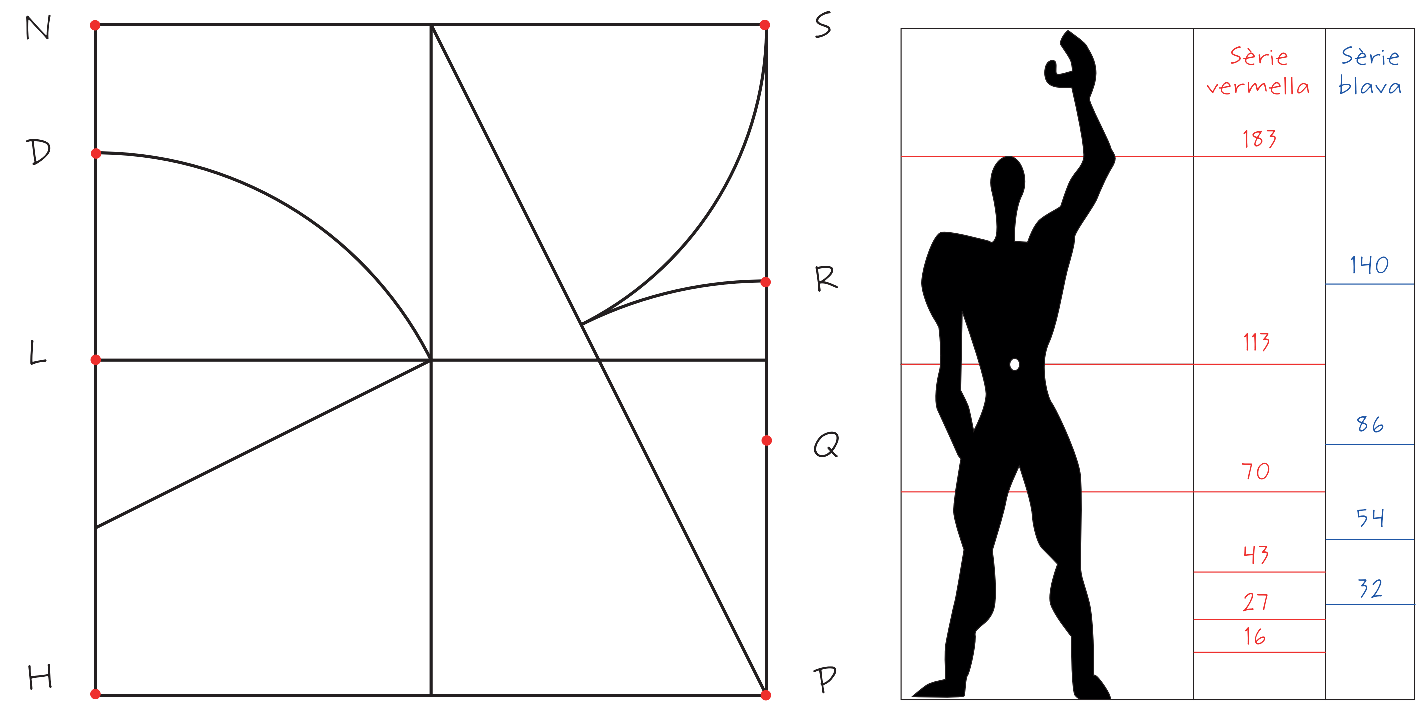


L'anomenat «Home de Vitrubi».

Molts artistes en diferents èpoques han fet estudis sobre les mesures de l'«home ideal». Un dels més coneguts és el de **Leonardo da Vinci**, que va dibuixar en un dels seus diaris cap a l'any 1492. En ell hi ha moltes relacions entre les diferents mesures del cos humà, com que *la longitud dels braços estesos d'un home és igual a la seva alçada.*

I n'hi ha una altra que no es veu: la relació entre **l'alçada total** i **l'alçada fins al melic** és igual a Φ.

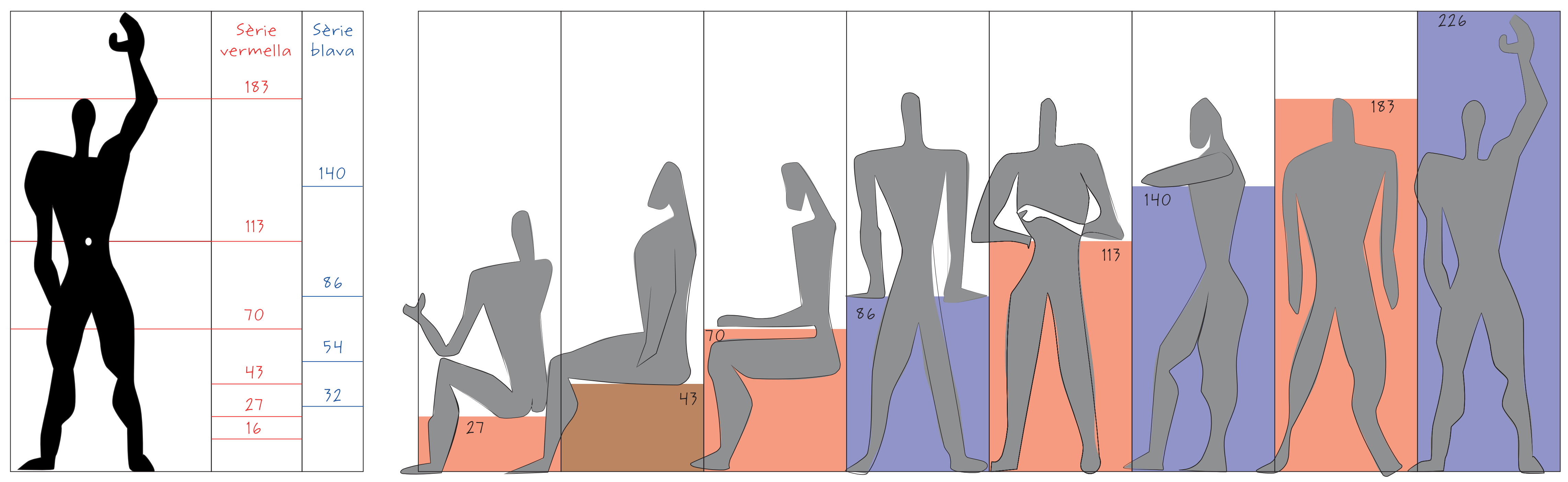
$$H/L = \Phi$$



Modulor per a una alçada d'1,83 m (mesures en mm).

El Modulor de Le Corbusier

Un dels arquitectes contemporanis més influents ha estat **Le Corbusier** (1887-1965). Per dissenyar cases i mobles utilitzava el **Modulor**, que defineix com *un aparell de mesura fundat en l'estatura humana i en la Matemàtica. Un home amb el braç alçat dona als punts determinants de l'ocupació de l'espai –el peu, el plexe solar, el cap, la punta dels dits amb el braç alçat– tres intervals que defineixen una sèrie de seccions àuries de Fibonacci.*

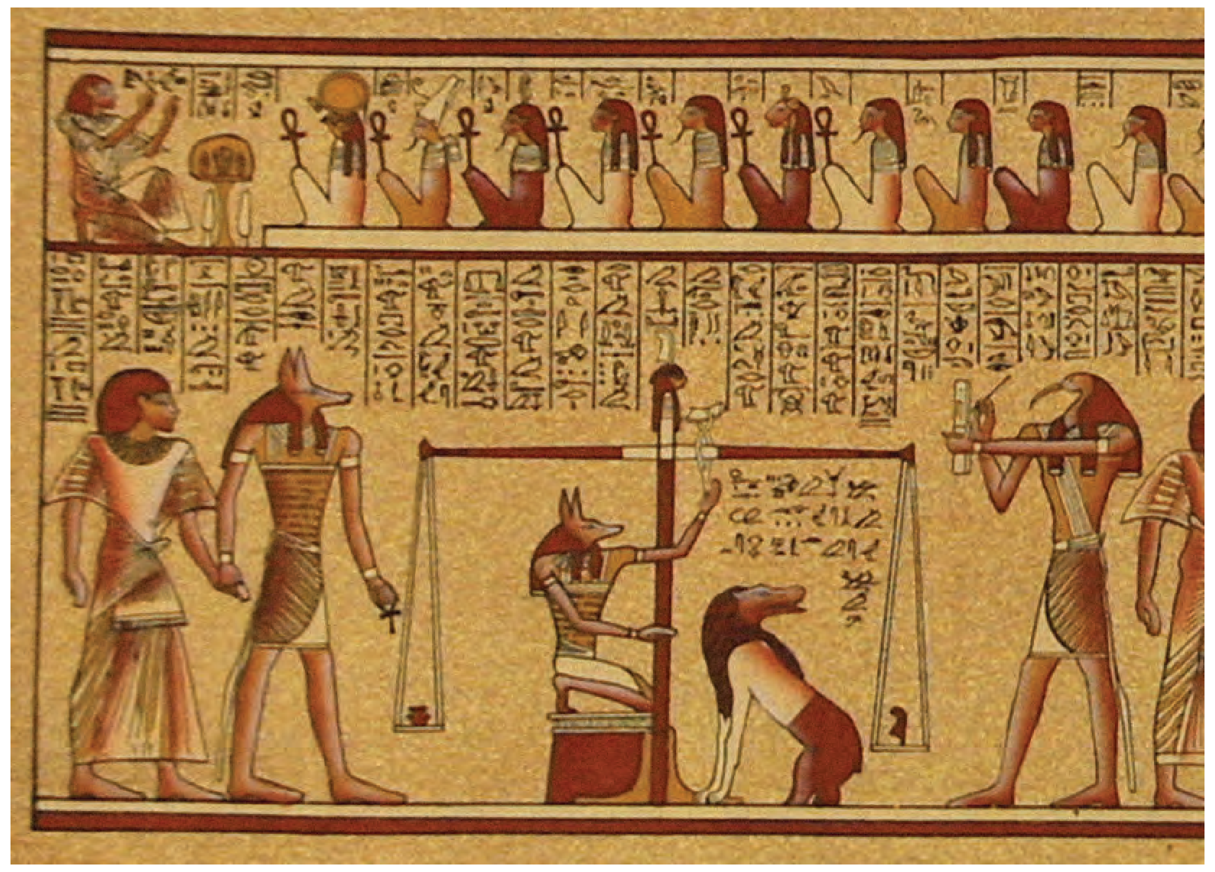


6 La perspectiva (1)

La perspectiva és la regna i el timó de la pintura.
Leonardo da Vinci

La perspectiva és un mètode emprat per representar espais de tres dimensions en una superfície plana, la superfície del quadre. No resulta intuïtiva, sinó que depèn de les convencions entre l'artista i l'espectador.

Altres civilitzacions en van utilitzar d'altres. En la figura del papir egipci pertanyent al *Llibre dels Morts* els jutges divins pesen les ànimes per veure si se'ls recompensa amb la vida eterna. Les figures de diferents mides marquen les diferències socials. Però la representació és plana!



Papir del *Llibre dels Morts*, compilació de diverses èpoques.

Fragment de mosaic romà, museu del Barco (Tunis).

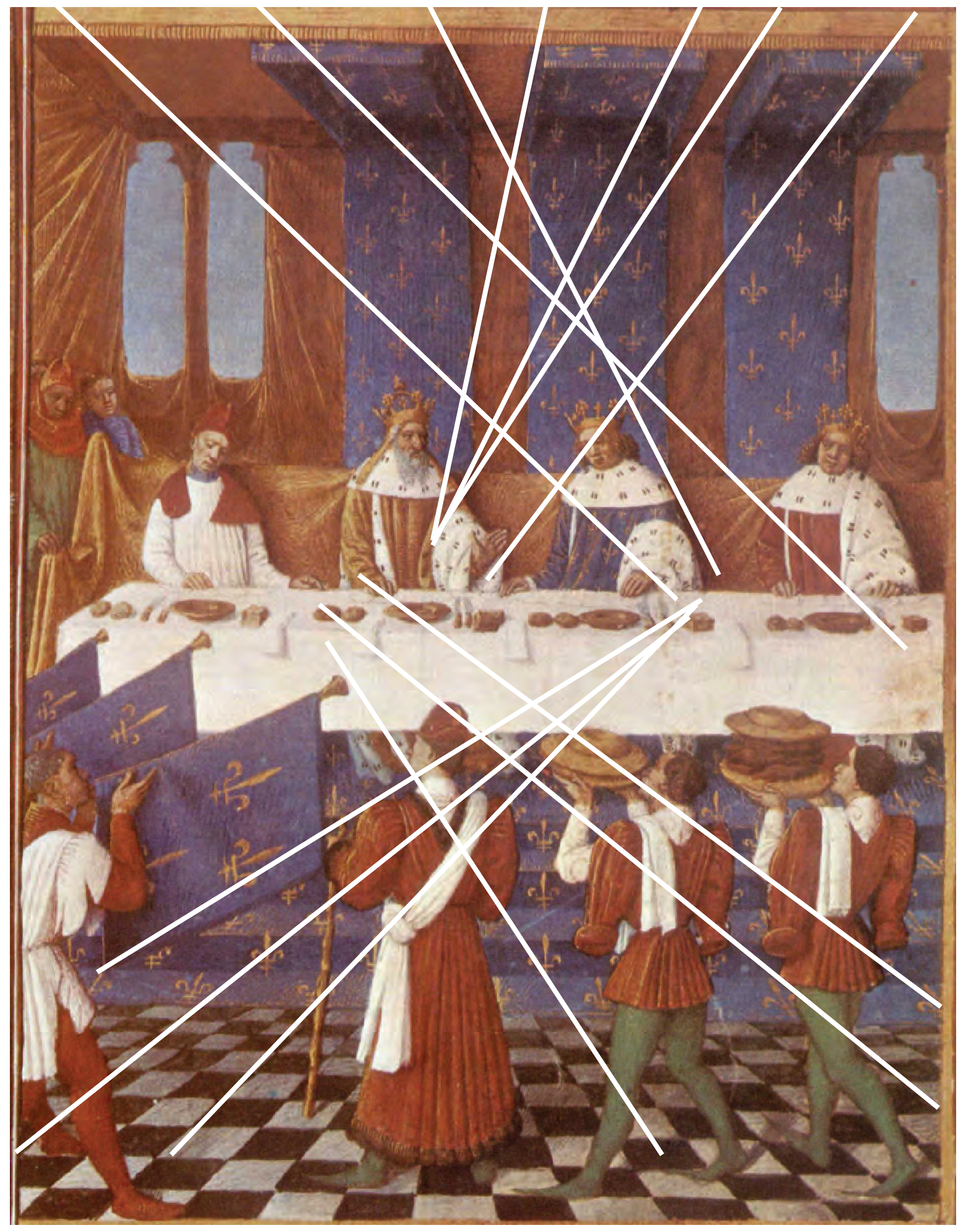
En el mosaic romà pots observar els intents de «sortir del pla», en què es dona una tercera dimensió mitjançant la representació del que es veu des de diferents punts de vista.

Veuràs que són del tipus dels dibuixos fets per infants en els seus intents de representar el volum. També et pot recordar certs quadres cubistes, com alguns de Picasso que trobaràs en un altre mural.

Encara al llarg de l'edat mitjana les representacions no tenen profunditat, de proporcions coherents amb la distància de l'espectador a la qual es troben les figures. En els quadres es destaca per grandària la persona més important, o la que porta el pes de l'acció, i sobre ella se centren les mirades, fins i tot dels personatges del quadre.

Manuscrit il·luminat del s. XV on apareixen la torre i el pont de Londres.

Al llarg dels s. XIV i XV, diversos pintors van aproximant-se a representacions més conformes amb el que veu l'ull. Però encara falta molta precisió, es fa a ull. Observa en el quadre de Fouquet que els diversos «punts de fuga intuïtius» no convergeixen en només un, ni en dos. La perspectiva encara no s'ha «matematitzat».



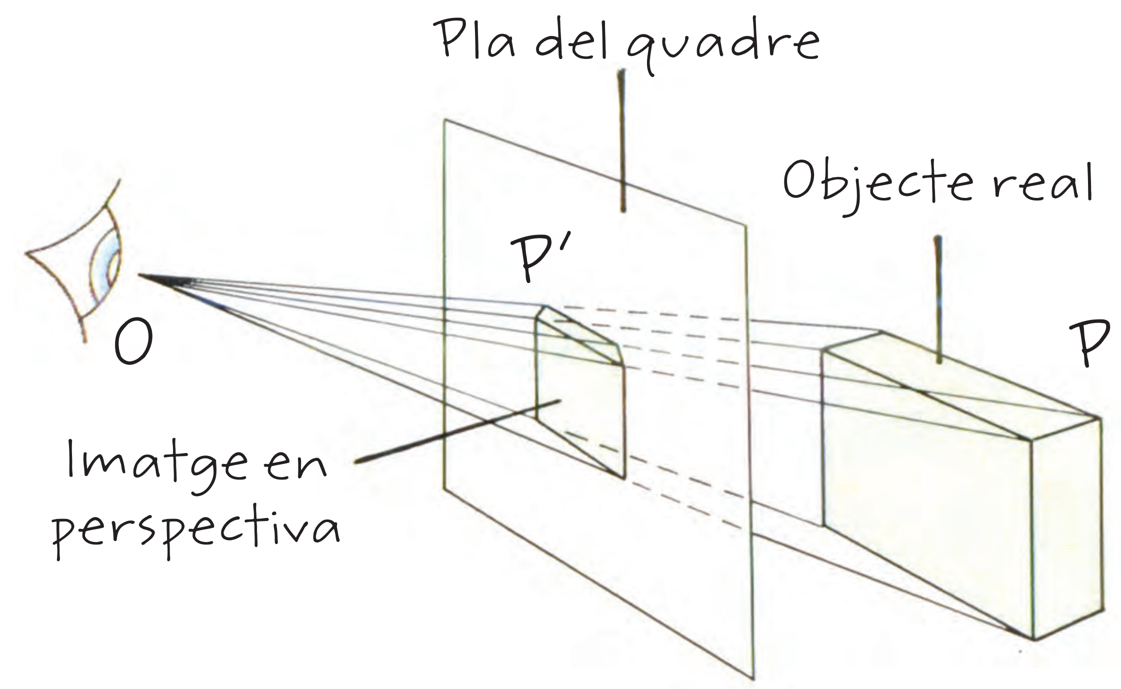
El banquet reial. **Jean Fouquet** (1420-1480).

7 La perspectiva (2)

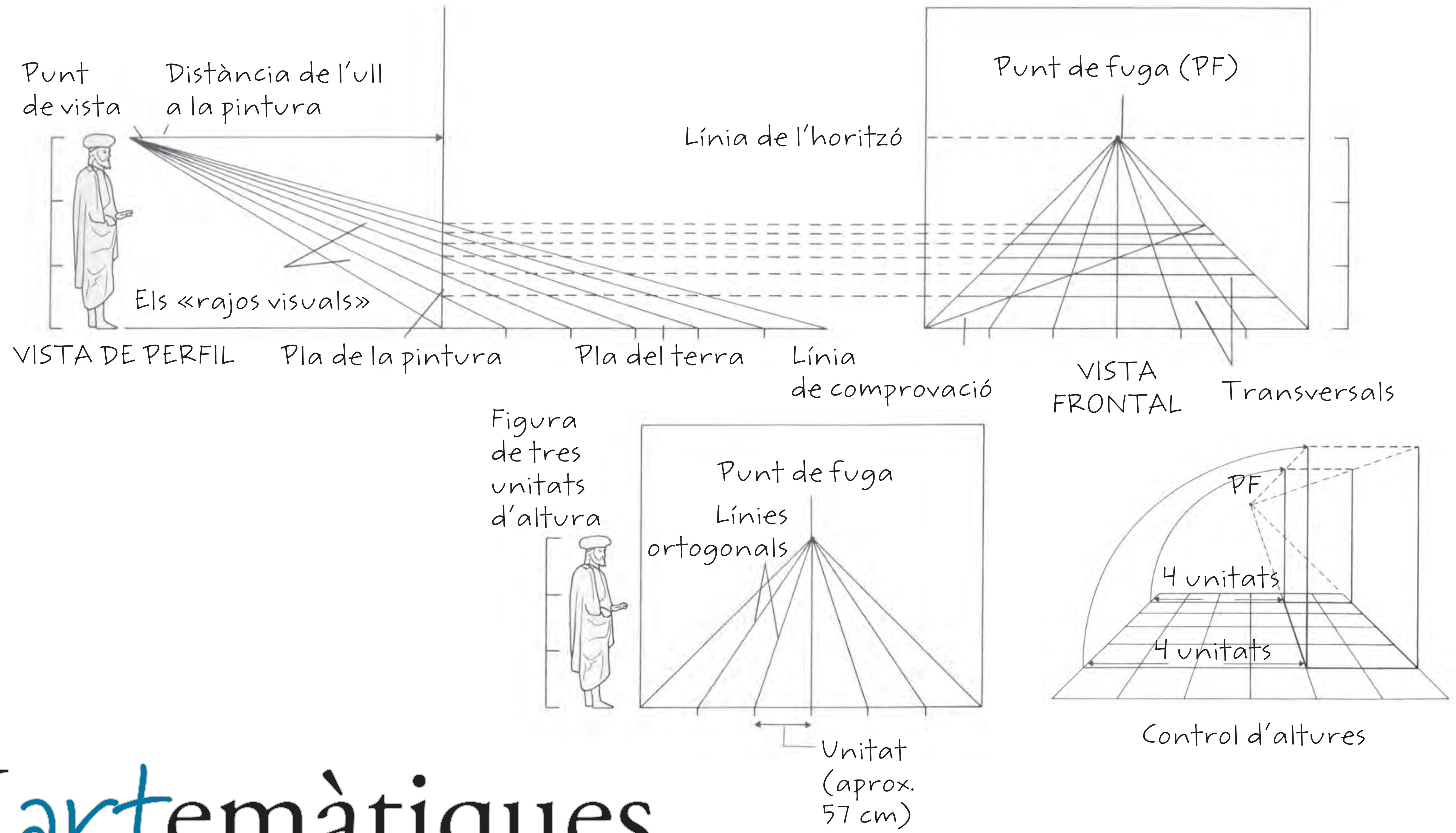
El primer requisit per a un pintor és conèixer la geometria.
Leon Battista Alberti

Des de la primera mitat del s. xv existeix «la nostra» perspectiva. Els pintors italians i francesos van intentar pintar quadres fidels a la realitat.

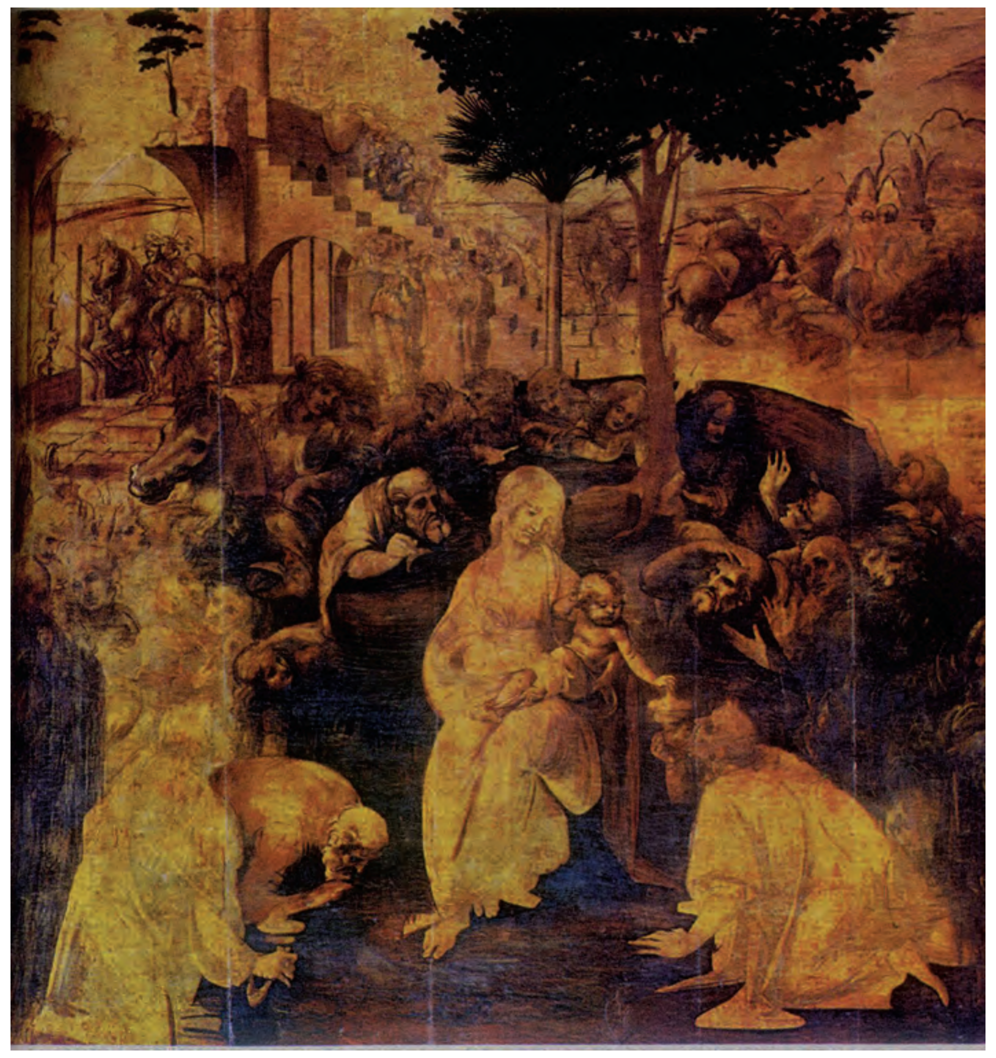
El model matemàtic s'explica a la figura: el punt **O** és l'ull de l'espectador. Imaginarem davant d'ell una superfície en posició vertical, el quadre. Un punt qualsevol **P** de l'objecte l'unim mitjançant una recta amb **O**; la intersecció **P'** amb el pla del quadre és la seva representació.



Leon Battista Alberti, en el seu *Tractat de la pintura* (1435), ens explica el seu mètode per aconseguir representacions de la realitat. Observa com d'útils resulten els enrajolats per comprovar la correcció dels traçats i les mesures en perspectiva.

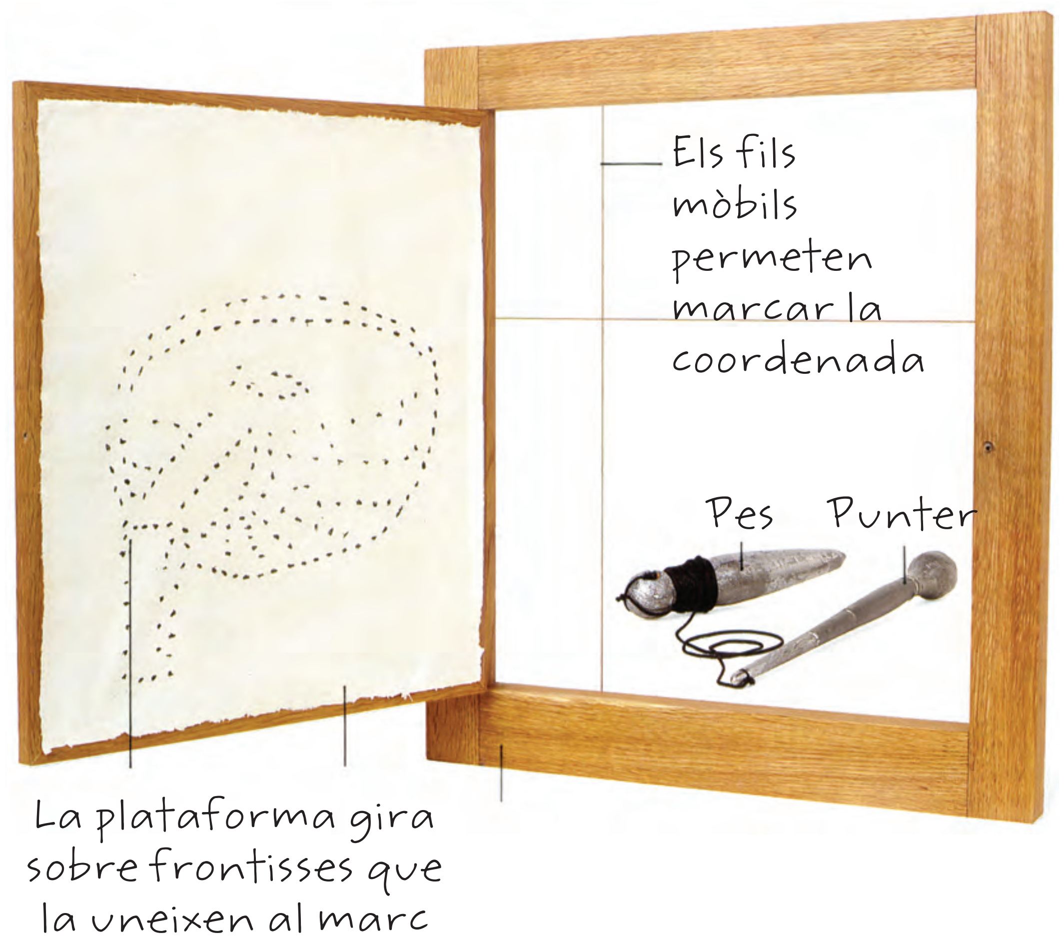


Leonardo da Vinci (1452-1519), en el seu estudi de la pintura inacabada l'*Adoració dels Mags*, ens mostra un exemple de perspectiva lineal amb un sol punt de fuga. La quadrícula del terra «fuig» cap al punt de fuga situat al cap del genet del cavall encabritat.



Tots aquests procediments els va il·lustrar **Albrecht Dürer** (1471-1528), que tenia un gran interès per l'aplicació de les matemàtiques en el seu art. Pots veure-ho en els gravats que ens va deixar on es descriuen els aparells que ajudaven l'artista a traçar perspectives precises.

Gravat d'A. Dürer en què es mostren instruments emprats en la seva època per facilitar el traçat de perspectives.



8 La perspectiva (3)

El quadre és una finestra oberta a través de la qual es veu l'objecte pintat.

Leon Battista Alberti

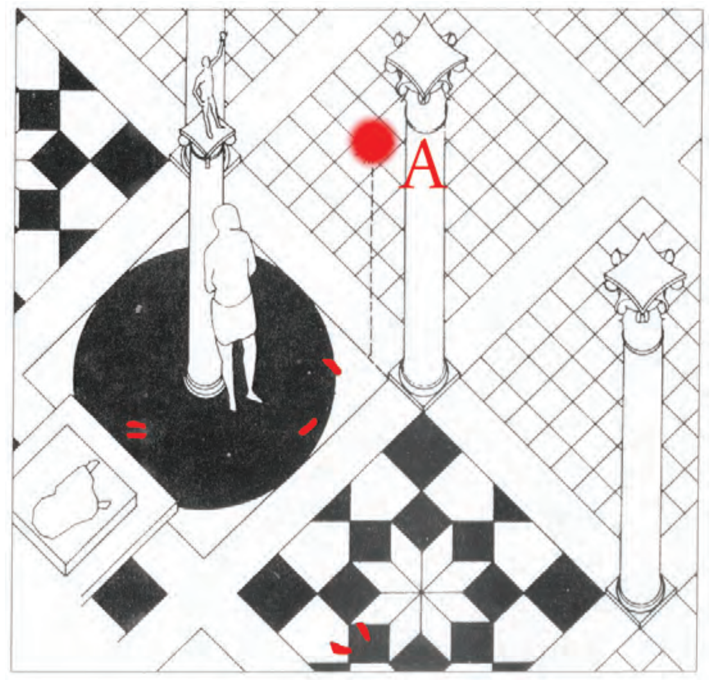
A mesura que s'implanten les tècniques geomètriques en la realització de perspectives, els artistes s'arrisquen en la representació de fenòmens més complexos. Veurem alguns exemples de «virtuosisme» primerenc en l'ús de la perspectiva.

Piero della Francesca va pintar *La flagel·lació de Crist* vora l'any 1460. Pocs anys més tard, un altre artista, **Kemp**, va dir: *Cap imatge pot traspuar un aire de control geomètric tan pronunciat, ni cap pintura va ser mai més tan escrupolosament planejada.*

Per descomptat ha estat una taula molt estudiada.

Della Francesca va mostrar un gran interès per la geometria. Va escriure el tractat «Sobre els cinc cossos regulars», en el qual encaixava totes les formes en els poliedres regulars. L'encaixada s'utilitza habitualment en dibuix artístic.

Alguns estudiosos n'han destacat l'acurada composició (en aquesta ocasió, utilitza la raó «arrel de 2», com en els fulls de la sèrie DIN, en lloc del nombre auri).



En matemàtiques, donada una operació o transformació, la seva inversa és aquella que deixa les coses com estaven. La «matematització» de la perspectiva permet reconstruir l'espai que la pintura reflecteix amb precisió: a l'esquerra tens la reconstrucció del paviment, la situació dels personatges, o fins i tot l'alçada atribuïda a Crist en aquella època, 178 cm. Hem «invertit» les lleis de la perspectiva. Una altra curiositat: el punt A marca el punt cap al qual es dirigeix la mirada de Crist en el quadre.

La pintura passa de ser un treball artesanal a ser una de les professions més nobles. Els pintors mostren la seva habilitat en enginyoses perspectives que testifiquen el seu domini de les matemàtiques.

Volta de l'església de Sant Ignasi de Roma. **Andrea del Pozzo** (1642-1709) representa un punt culminant de l'il·lusionisme en la perspectiva. La cúpula és en realitat una volta de mig canó i l'arquitectura sobre les finestres també és pintada.

9 Anamorfosi

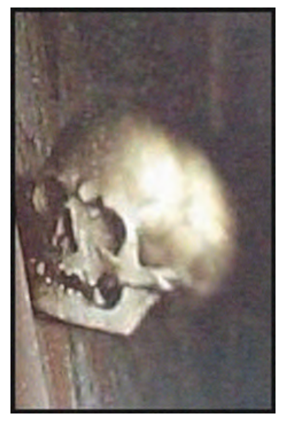
En una font de Granada, s'explica als visitants la història d'un califa que seleccionava qui seria el seu gran visir. Per aconseguir-ho va convidar els candidats a identificar un objecte que descansava o surava a l'aigua poc profunda. Tots, excepte un, van dir ràpidament que es tractava d'una taronja. L'últim la va agafar i la va identificar com a mitja taronja. I es va guanyar el lloc.

Lawrence Wright

Una anamorfosi és una pintura o un dibuix que ofereix a la vista una imatge deformada i confusa, o regular i acabada, segons des d'on se la miri, o segons on es reflecteix.

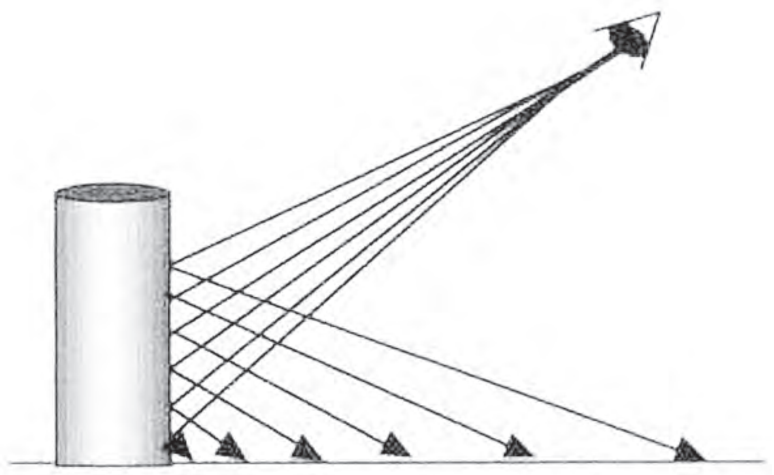
Un primer tipus el formen les anomenades anamorfosis **obliqües**, de les quals trobem un exemple en el famós quadre de **Holbein** *Els ambaixadors*.

Els ambaixadors, de **Holbein**, carregats de simbolismes.

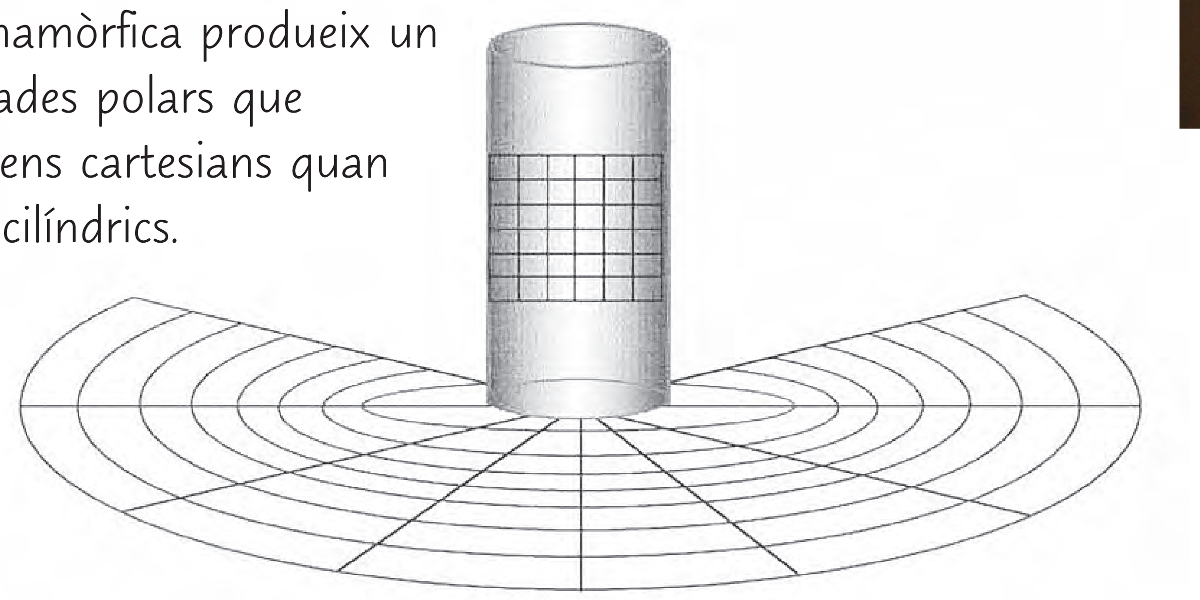


La calavera adquireix la seva forma recognoscible quan es mira des d'un punt enganxat a la pintura per la seva banda inferior dreta (millor si es mira amb un ull tancat).

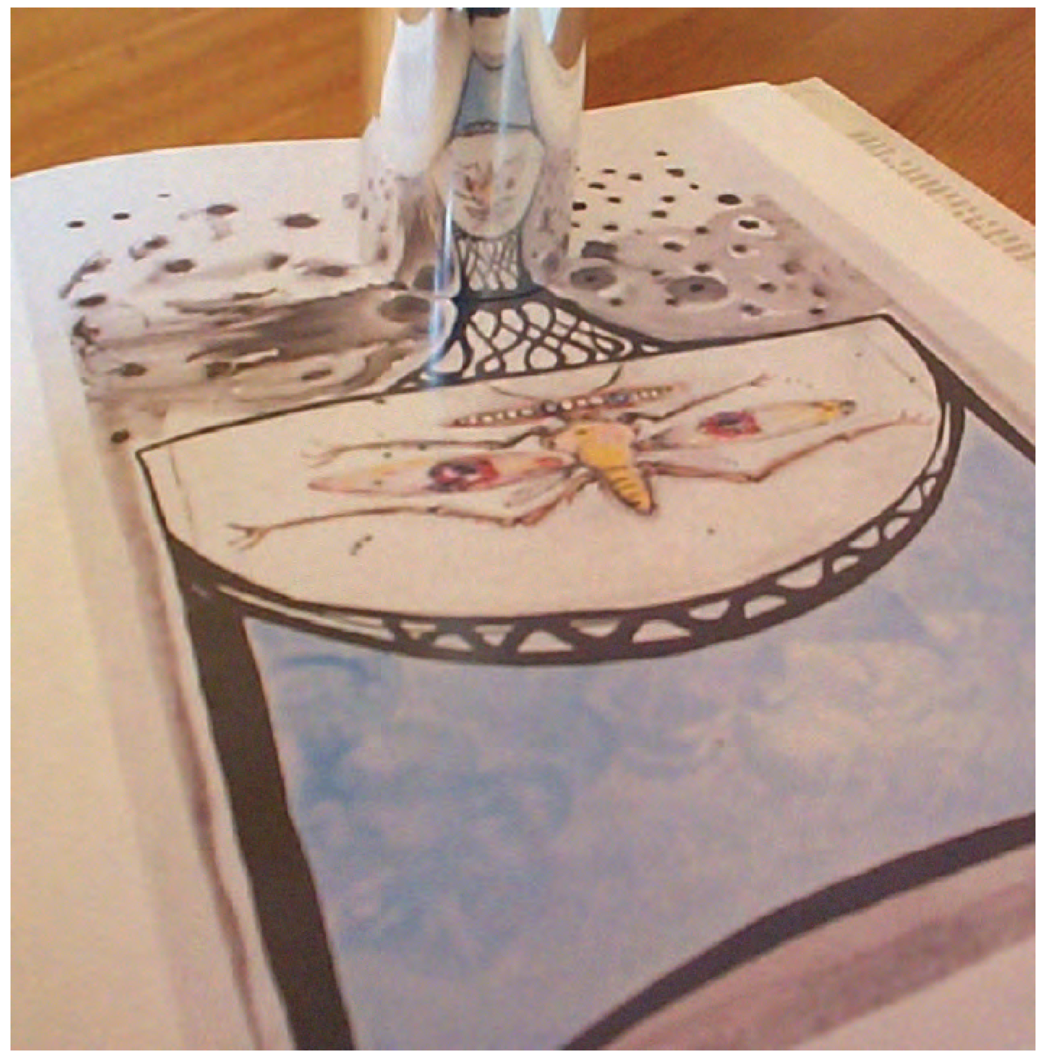
En un altre tipus d'anamorfosi s'ha de mirar la imatge reflectida en un mirall **cilíndric**, **cònic** o **piramidal** per reconstruir la imatge regular.



La transformació anamòrfica produeix un conjunt de coordenades polars que tornen als seus orígens cartesians quan es veuen en miralls cilíndrics.



Exemple d'anamorfosi de mirall **cònic**. L'efecte és més sorprenent perquè les vores es reflecteixen en el centre i viceversa.



El joc de l'anamorfosi practicat per **Salvador Dalí**. En *Insecte i pallasso*, tant la imatge anamòrfica com la reflectida tenen sentit per a l'espectador, però són objectes molt diversos.

L'anamorfosi és només un joc? Té alguna utilitat? Es fan servir aquestes tècniques en les retransmissions esportives quan es veuen anuncis projectats a la pista, al circuit o al camp de joc.

També s'usa en la senyalització horitzontal de carrers i carreteres. Els missatges pintats a l'asfalt, que s'han de veure des d'un punt de vista poc convencional, s'escurçarien a la nostra vista fins a fer-se il·legibles si no s'empressin tècniques semblants a l'anamorfosi obliqua.

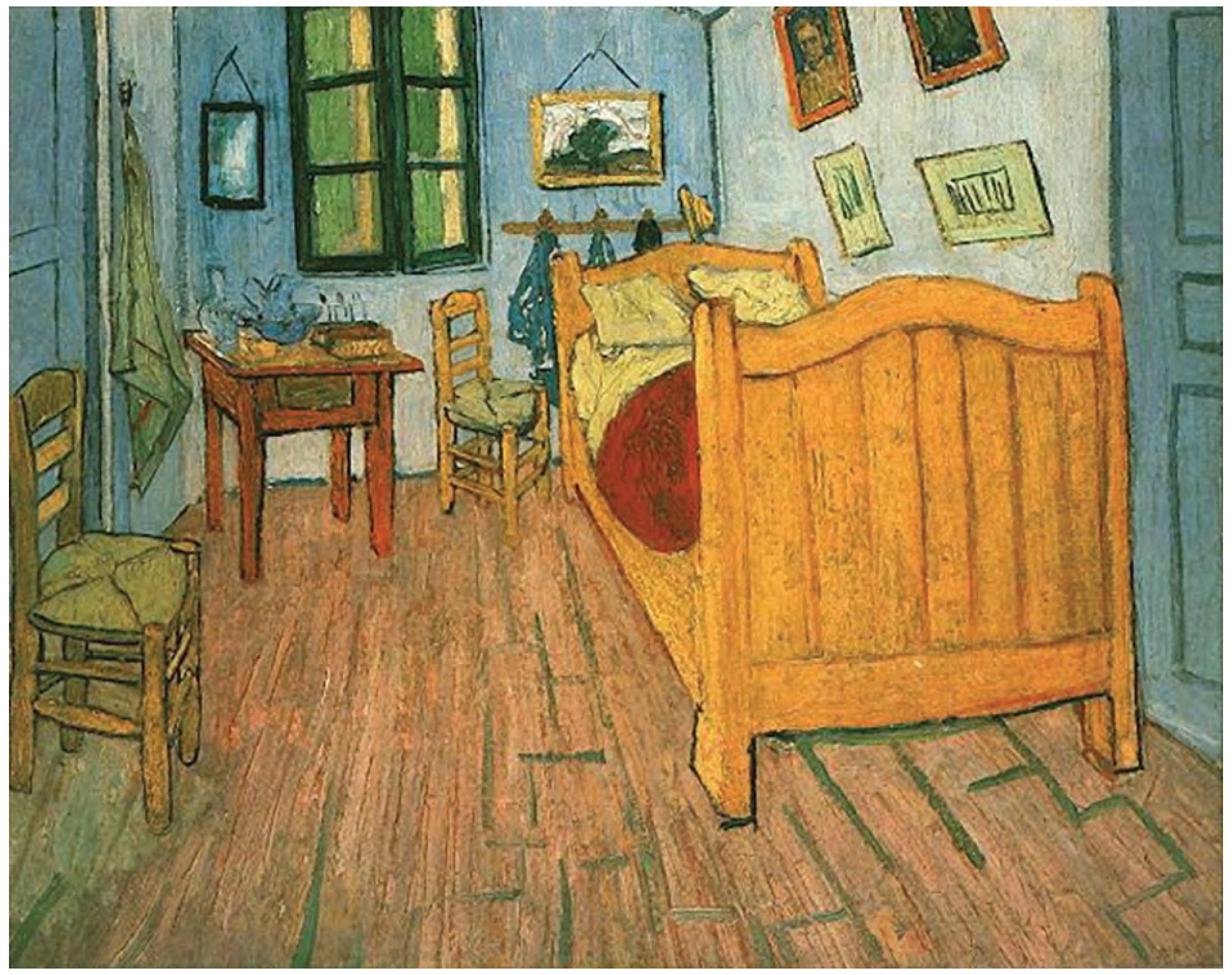
Des d'una certa distància, l'alçària de la fletxa sembla similar a la de la paraula CAR, però des del lateral observem que és el doble d'alta. Aquesta transformació, en rigor, és una simplificació de l'anamorfosi.

El camí cap a l'abstracció (1)

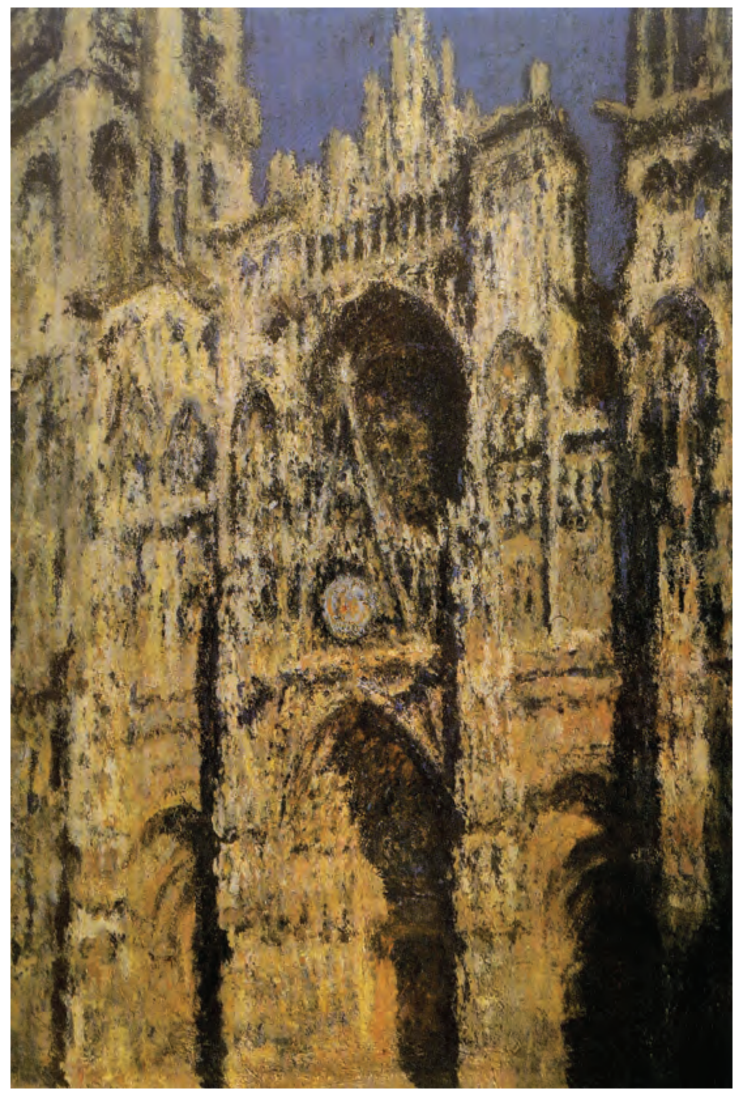
La història de l'afany d'imitació és diferent de la història de l'art.
W. Worringer

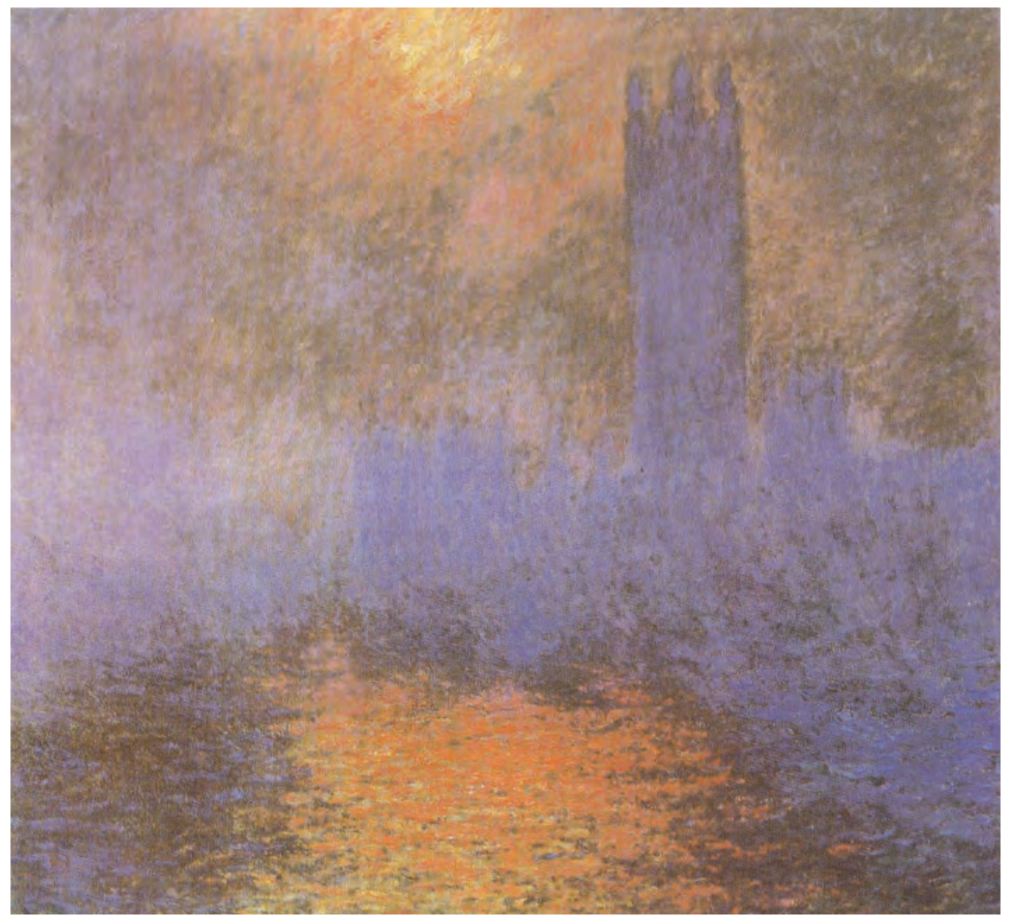
Cada vegada era més important l'estudi de l'espai i el domini de la perspectiva (fet que també va donar lloc a la plasmació d'«il·lusions òptiques», mural 12). En el quadre de **Velázquez** *Las Meninas* (1656), el punt de vista –l'ull que descriu l'escena– és múltiple: pot ser el pintor, la *menina* (dama d'honor) o el visitant. I el mirall del fons, on es reflecteixen els reis, introdueix en el quadre aquells qui el contemplem, l'espai *exterior*.

El dormitori de Van Gogh a Arle
Vincent Van Gogh.



Uns segles més tard (a finals del s. XIX) els pintors impressionistes proposen una nova forma de representar, «estudiant les relacions entre colors, entre pinzellades, entre llums» (**C. Corrales**). Es comença a renunciar a la imitació de la realitat.





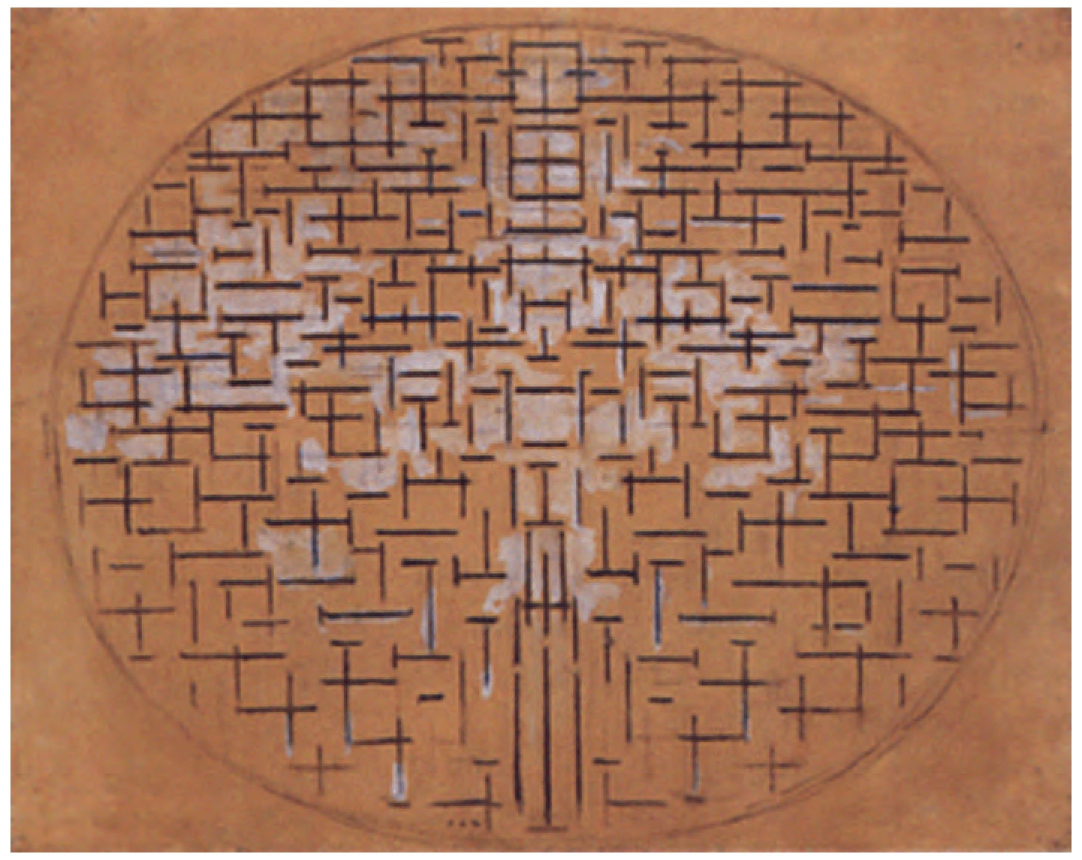
Claude Monet: Esquerra, *Catedral de Rouen*. Dreta, *Londres. El Parlament.*

11 El camí cap a l’abstracció (2)

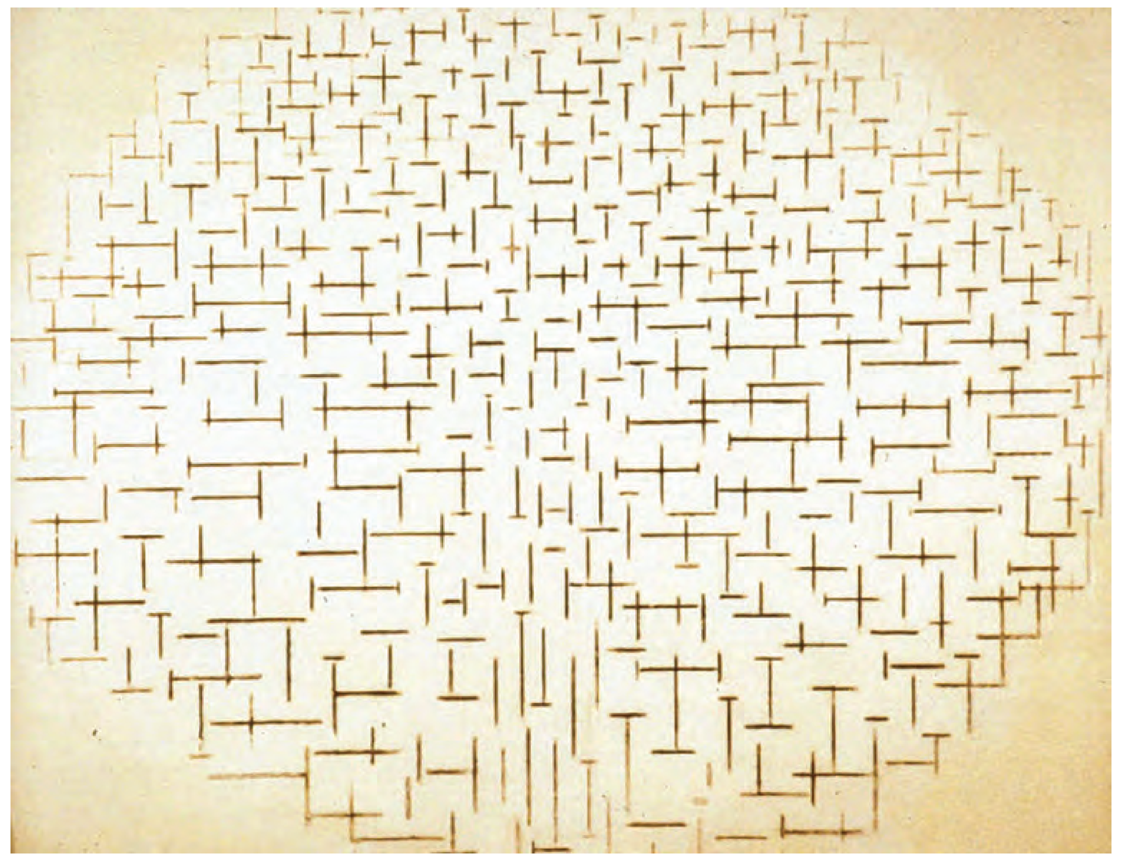
El cubisme redueix el màxim possible les figures del món físic
a les formes bàsiques que hi ha darrere.

D. H. Kahnweiler

En el camí cap a l’abstracció ens fixarem només en dos elements destacats. El que representa **Mondrian** se centra en la cerca de l’esquelet que hi ha sota dels objectes que pinta, en allò que no canvia.

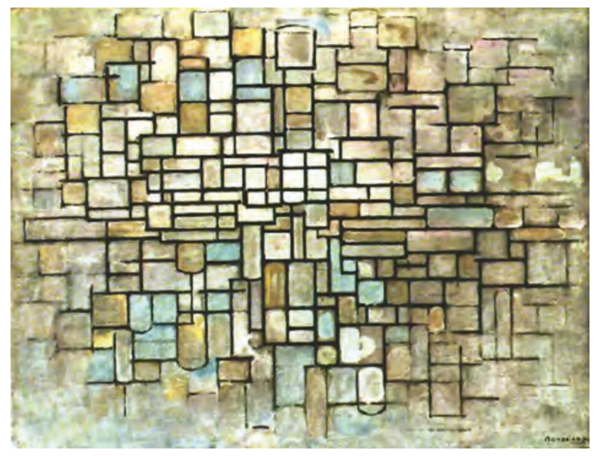


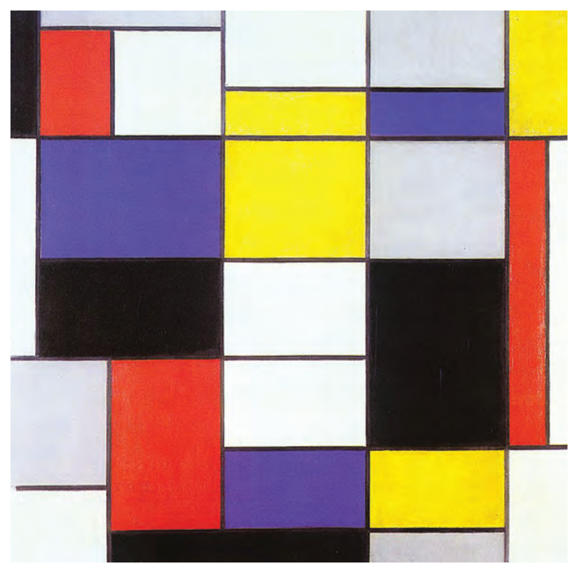
Quadre de la sèrie *Façanes d’esglésies.*



Quadre de la sèrie *Embarcadors i oceà.*

Així, els quadres amb rectangles de colors (com els del mural «Figures elementals») són esquelets d’edificis.





Progressius nivells d’abstracció en quadres de **Mondrian**.

El moviment **cubista** pinta els volums de tres dimensions mitjançant plans. I, en cadascun d’ells, el pintor hi plasma el que veu. S’abandona el punt de vista fix, l’artista es mou al voltant de l’objecte i representa el que observa en desplaçar-se, i ho fa amb diferents nivells d’abstracció.

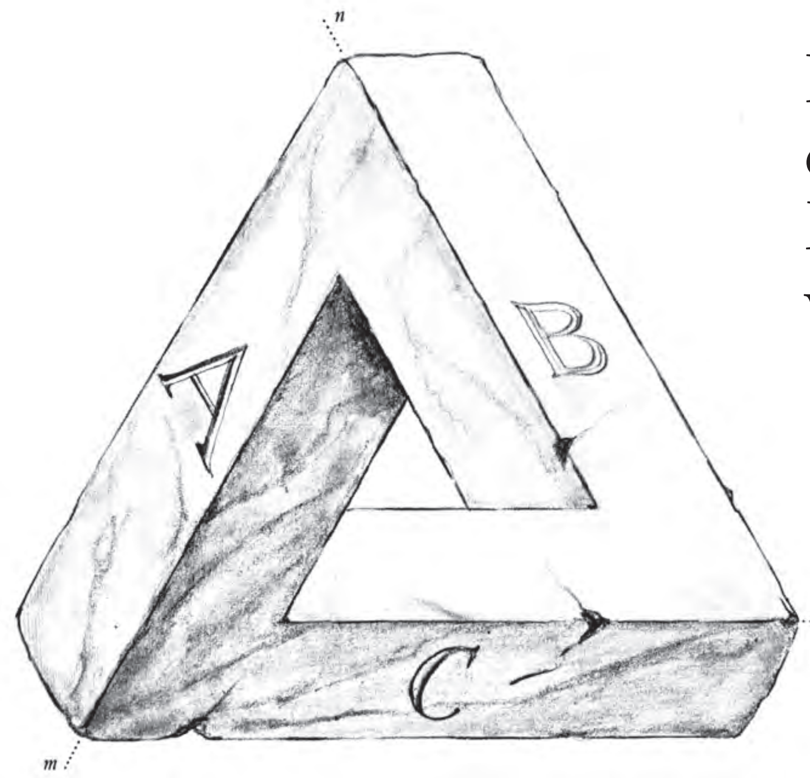
Aquí pots veure alguns dels diversos estudis (més de 54) que **Picasso** va fer en un exercici de recreació de *Las Meninas* de **Velázquez**.

Així aconseguien una descripció global a partir de descripcions locals i de les relacions entre elles.

Martemàtiques

12 Objectes impossibles

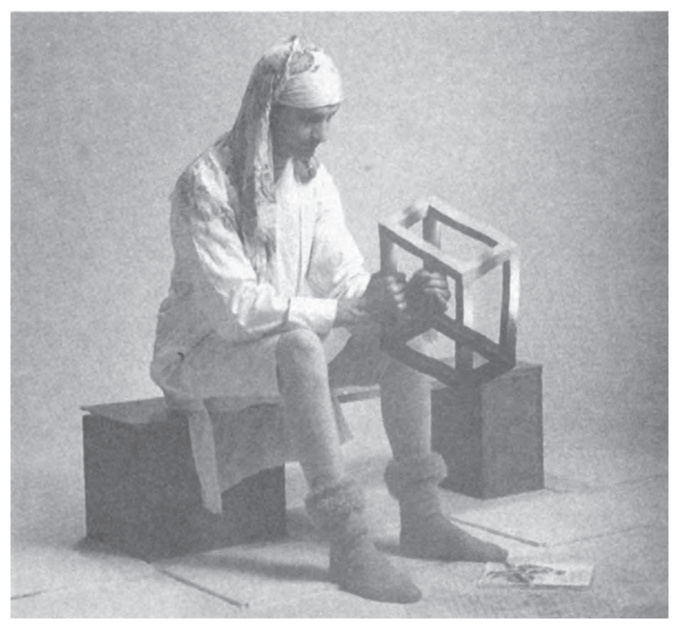
El Tribar, la impossibilitat en la seva forma més pura.
Roger Penrose

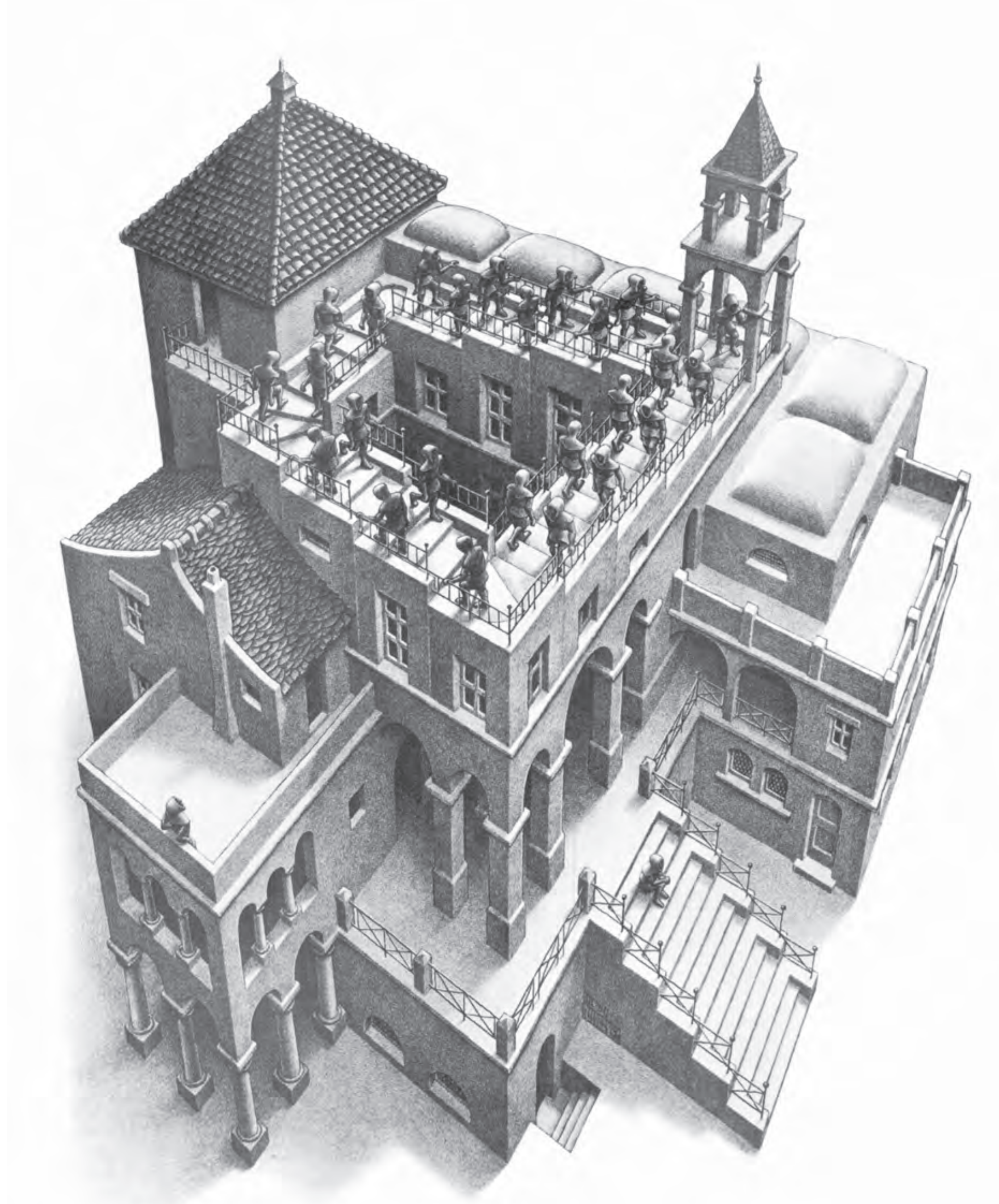


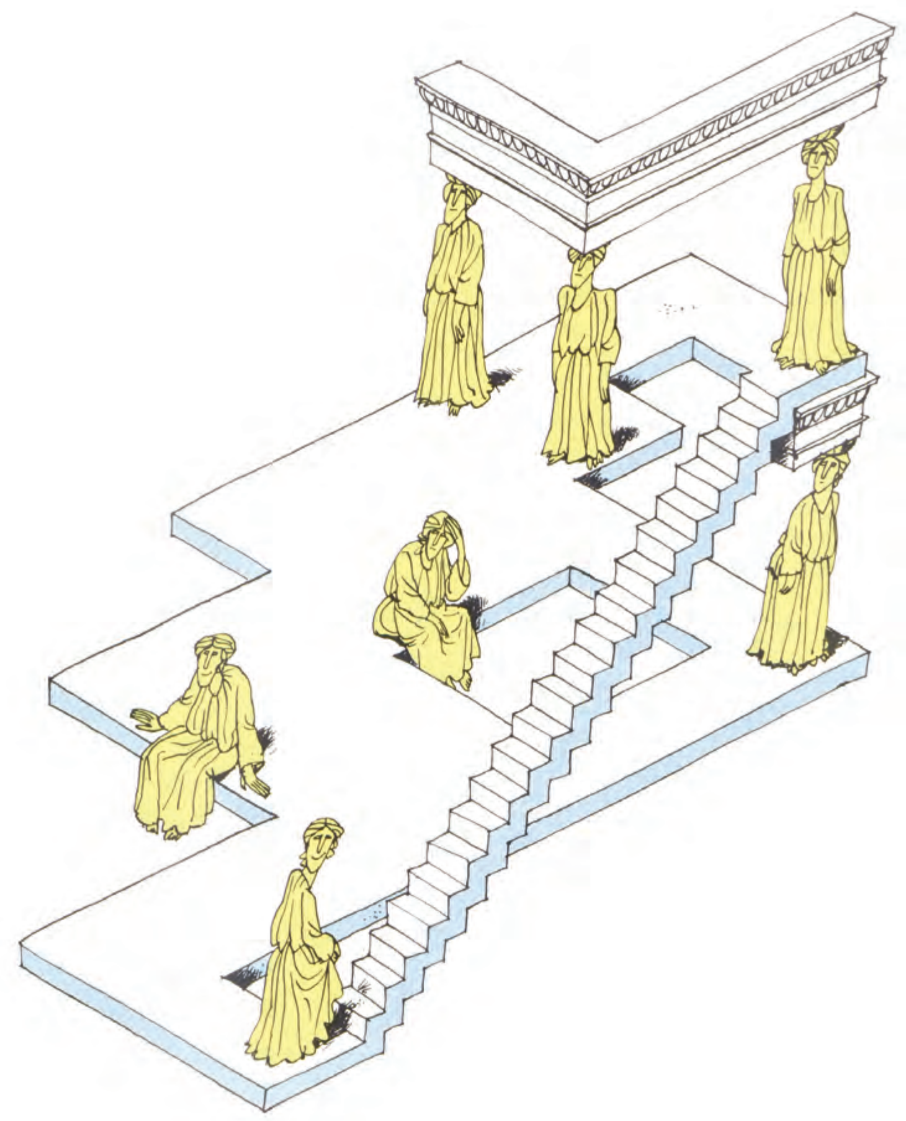
La construcció conscient d'objectes impossibles constitueix una pràctica relativament recent. El 1934, el suec **Oscar Reutersvärd** va dibuixar el primer *Tribar*.

El 1954, **Penrose** va visitar una exposició de gravats de **M. C. Escher**. Motivat pel que hi va veure, va publicar un article sobre les figures impossibles, en particular el *Tribar* i les escales sempre ascendents. Les seves aportacions les va utilitzar després Escher en diverses de les seves obres.

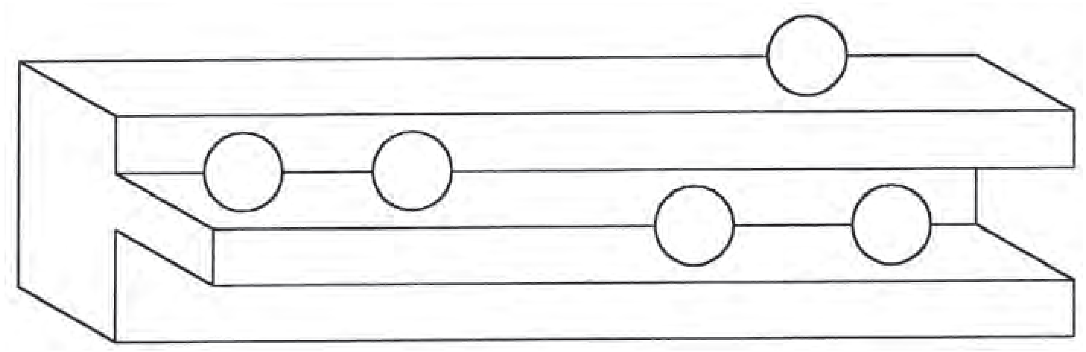
A *Belvédère* (1958), **Escher** es recrea en els objectes impossibles. Alguns artistes com **M. Hamaeckers** (a la dreta) segueixen el joc a Escher i construeixen maquetes per «fotografiar» impossibles. Un canvi en el punt de vista i la realitat serà molt diferent.

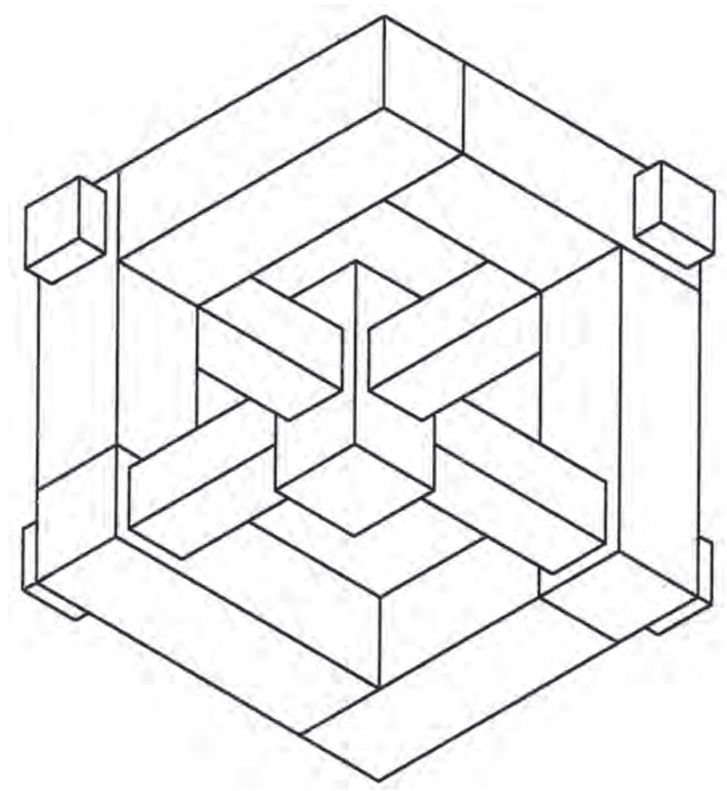






Basant-se en l'article de **Penrose** sobre les escales contínuament ascendents (o descendents), **M. C. Escher** realitza el seu gravat *Pujant i baixant* el 1960.



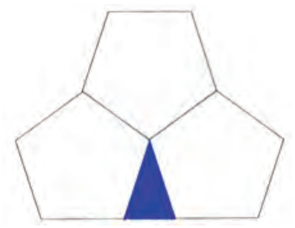


Altres exemples de figures impossibles.

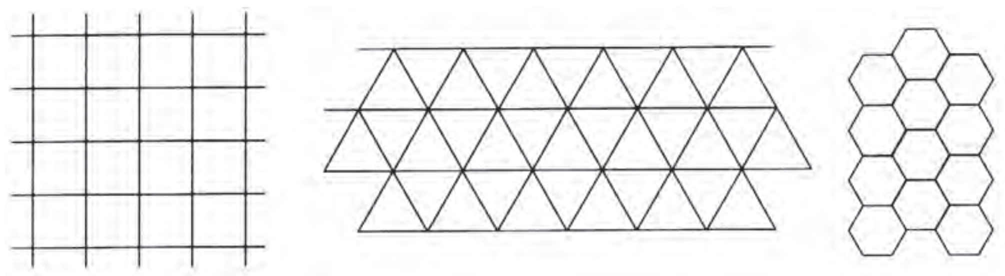
13 Mosaics (1)

Posa els peus a terra i fixa't en la forma de les rajoles. Volem recobrir el terra (o una paret o una altra superfície plana) amb rajoles totes iguals i a més que siguin polígons regulars. Amb quines rajoles ho podem fer? No es pot enrajolar amb tots els polígons regulars: amb pentàgons no es pot. Per què? Perquè per poder fer-ho la suma d'un nombre enter d'angles iguals ha de ser de 360⁰. O que l'angle del polígon regular sigui divisor de 360⁰. L'angle dels polígons regulars és:

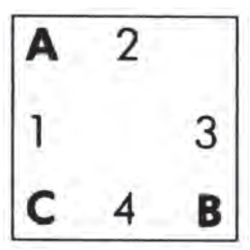
Nombre de costats	3	4	5	6	7	8
Angle (graus)	60	90	108	120	128,6	135



Els divisors de 360⁰ (120⁰, 90⁰ i 60⁰) que corresponen a l'hexàgon regular, quadrats i triangle equilàter seran les úniques rajoles amb què es podrà enrajolar. Com que un hexàgon es pot dividir en sis triangles equilàters, només hi ha dues possibilitats d'omplir el pla amb polígons regulars: les trames quadrades o triangulars.



Explicarem una mica la manera de fer mosaics artístics a partir d'una xarxa quadrada. Prenem un quadrat i en marquem els costats i els angles com es veu a l'esquerra. Si el girem quatre vegades al voltant del vèrtex B tornem al quadrat original i tenim una figura de quatre quadrats (l'extrem superior esquerre de la figura A), que si la desplacem una distància igual a dues vegades el costat en horitzontal i vertical ens permet omplir tot el pla. Observa que els costats 1 i 2 dels quadrats (així com els 3 i 4) sempre coincideixen.



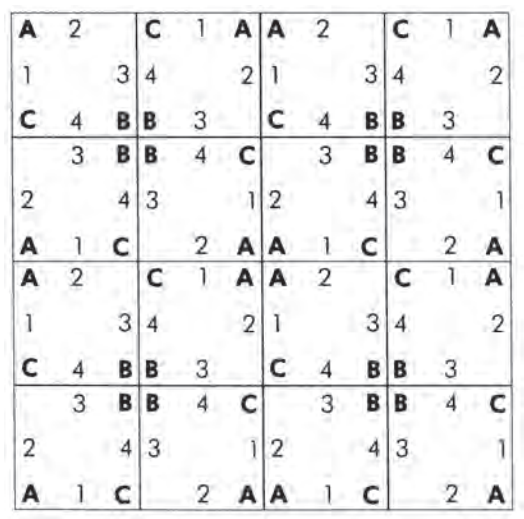
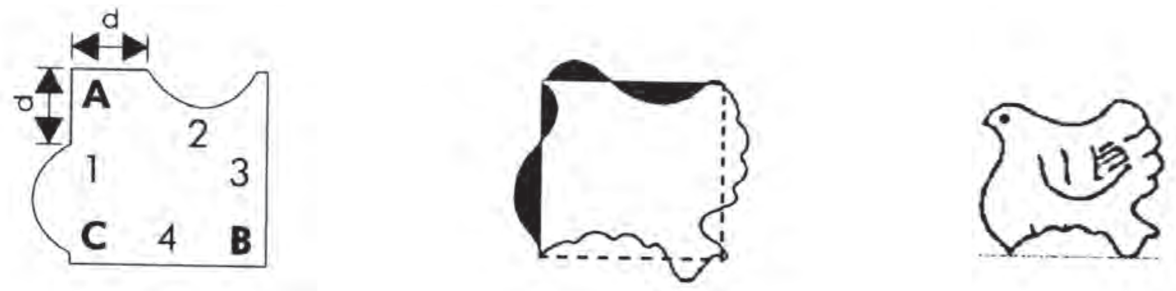
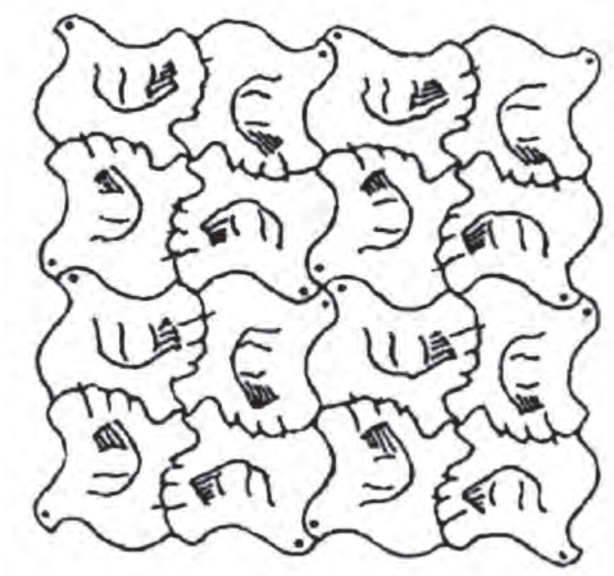


Figura A

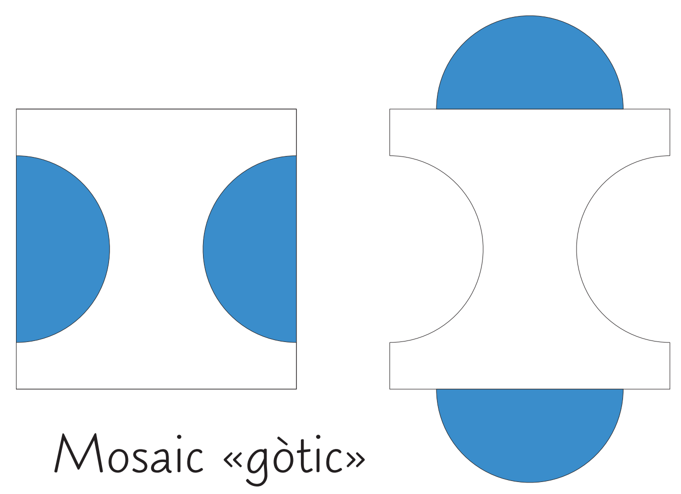
Podem variar els quadrats originals si afegim una superfície al costat 1 i la traiem al costat 2. Podrem fer canvis semblants en els costats 3 i 4, fins a tenir una rajola de la forma que desitgem. Per obtenir un colom podem afegir i treure els trossos de la figura; i pintar-li ulls i ales: aquesta rajola omplirà tot el pla.



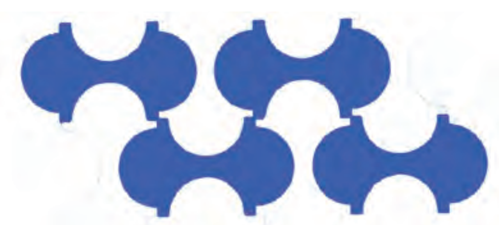
Per aconseguir-ho hem de reproduir els mateixos moviments (gir i translació) que havíem fet a la figura A i tindrem un mosaic de coloms, com el de la dreta (disseny de **S. Haak**). L'única limitació que tenim és la nostra imaginació i la nostra habilitat; la tècnica és senzilla.

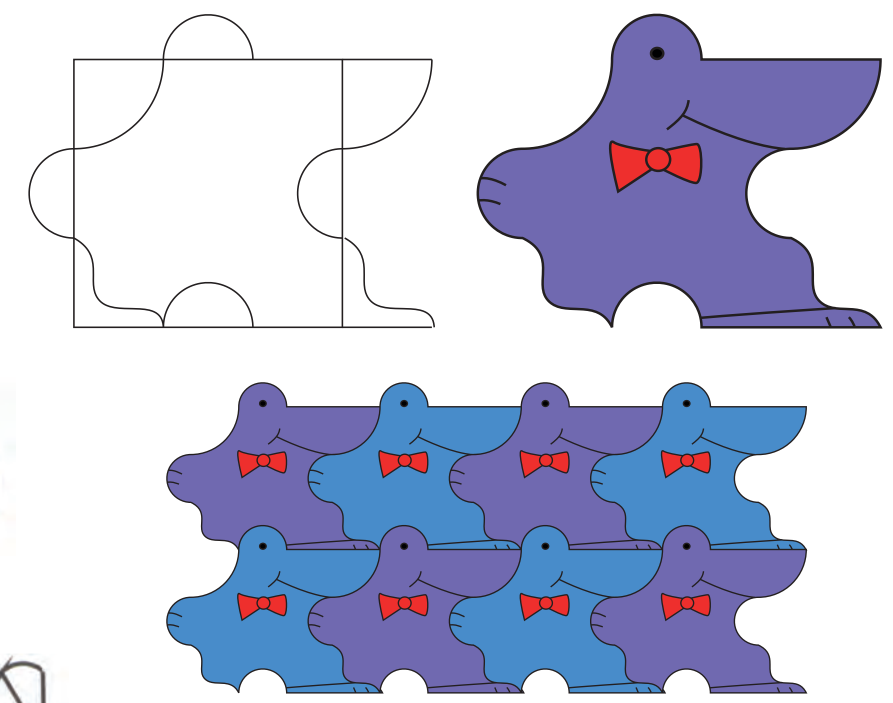


Aquí et presentem exemples dissenyats per alumnes de 14 i 15 anys, en què el recobriment del pla no sempre és del mateix tipus que en l'exemple dels coloms.

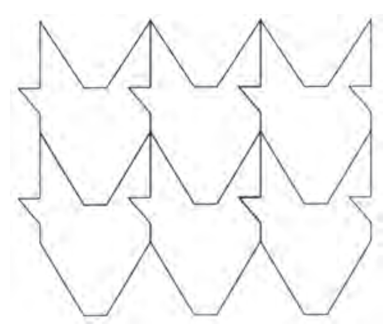


Mosaic «gòtic»





Mosaic «pingüí»



Mosaic «bou»

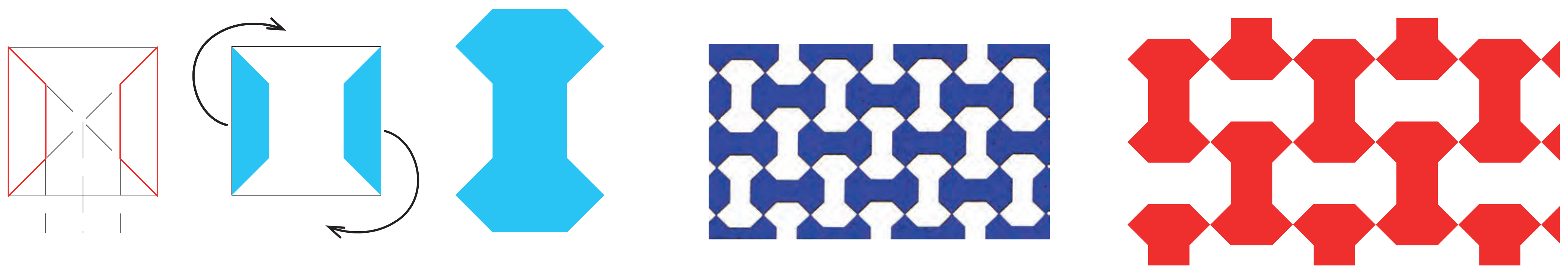
Mosaic «teula»

14 Mosaics (2)

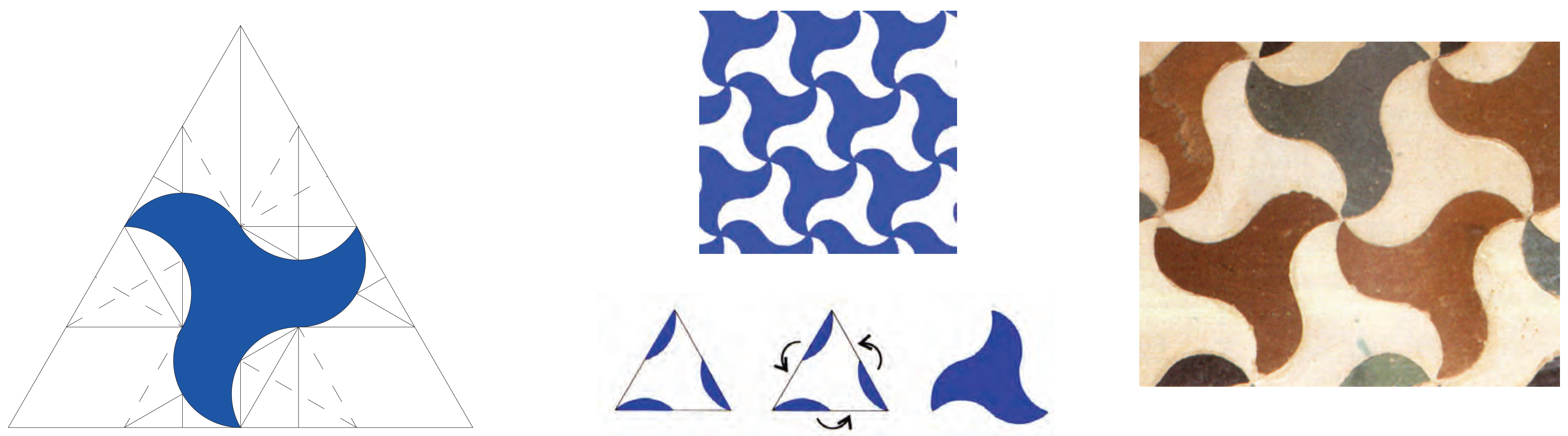
Per als musulmans el poder procedeix d'Al·là i, a més, el protegeix. Per això Al·là ha d'estar present en tots els palaus nassarites. Com posar-ho de manifest si la seva religió «prohibeix» fer servir imatges seves? La resposta és matemàtica. Una característica fonamental de la decoració geomètrica és l'ús d'un sol disseny que per multiplicació de si mateix cobreix tota una superfície. Així s'aconsegueix representar la unicitat –Al·là és un– amb la multiplicitat –i és a tot arreu–.

Rafael Pérez Gómez

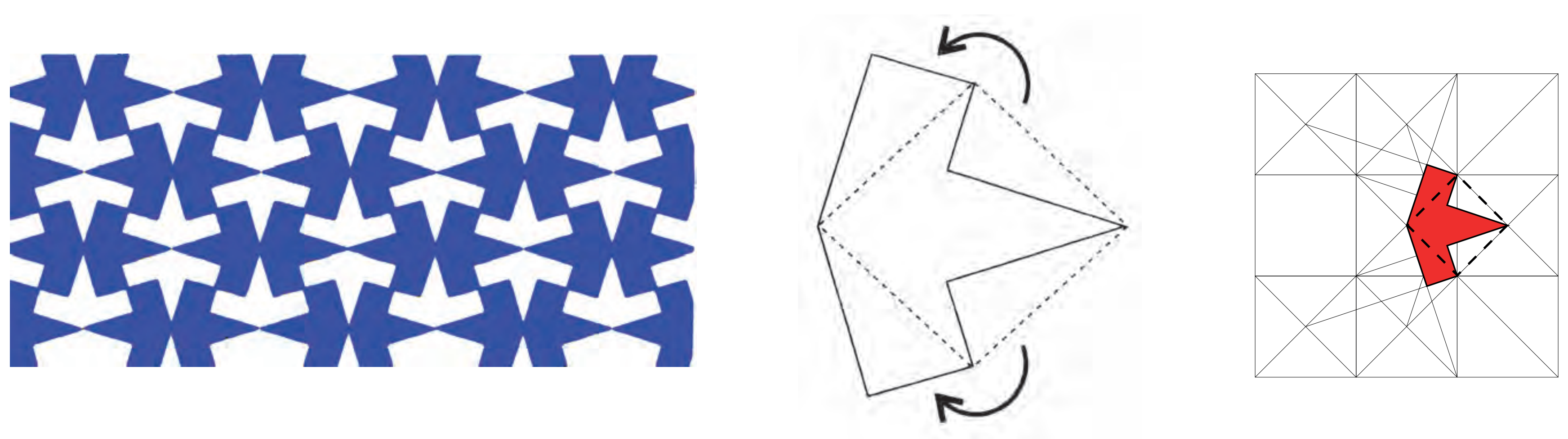
Et presentem tres dels mosaics que apareixen a l'Alhambra, construïda durant la dinastia nassarita (els reis de Granada abans de la conquesta pels Reis Catòlics el 1492). El primer s'anomena «os»; et mostrem com es forma i quin mosaic se n'obté:



A continuació hi ha l'«ocellet», que es crea a partir de la trama triangular i dona mosaics com aquests:



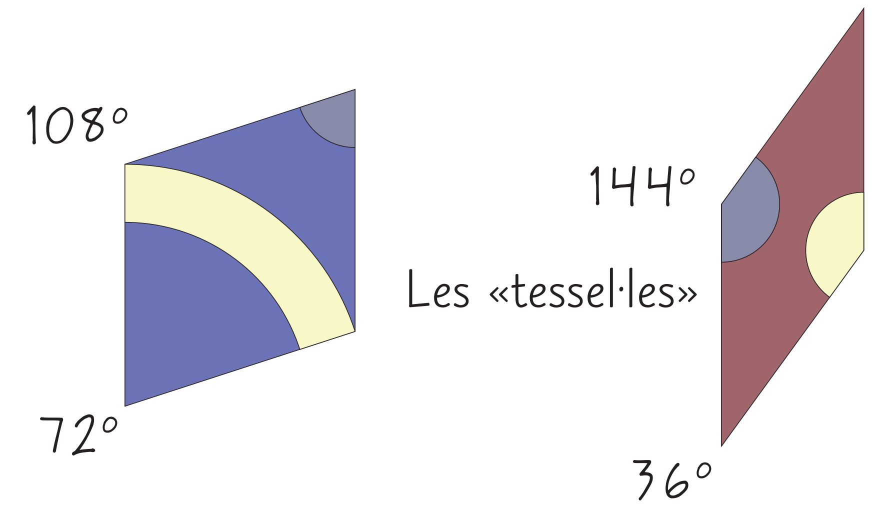
I en la tercera mostra de l'Alhambra comencem pel mosaic, com de claus. Al costat es descriu la manera de generar-lo:



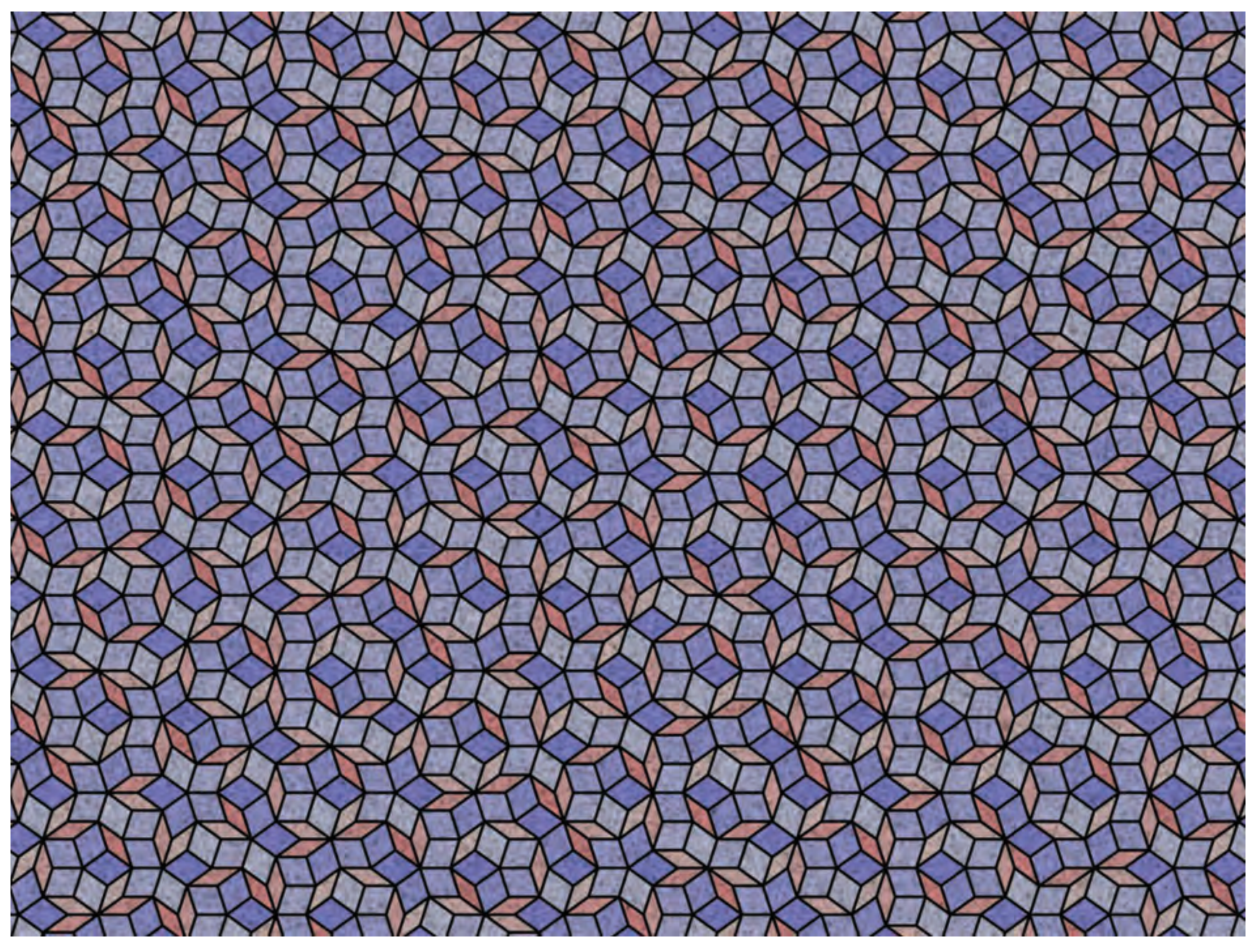
Veus que amb una base molt senzilla es poden aconseguir resultats sorprenents. A més, com passa a l'Alhambra, es poden pintar les rajoles de diversos colors i s'augmenta l'efecte que produeixen.

Hi ha moltíssimes altres possibilitats de construcció de mosaics, com les de l'holandès **Escher** (mural 22) o les que proposa el matemàtic **R. Penrose**: la possibilitat d'enrajolar el pla de forma **no periòdica**, és a dir, sense que es pugui trobar un conjunt de motius que es repeteixin constantment per translació o gir. Una manera d'aconseguir-ho és mitjançant les tessel·les (peces dels mosaics) i les regles per construir «mosaics de Penrose»:

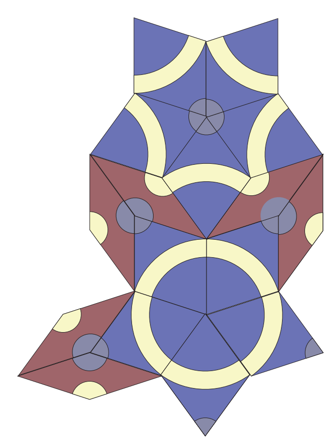
1. Els colors han de coincidir a les vores.
2. No has de deixar buits entre rajoles.



Les «tessel·les»



A l'esquerra pots observar un tros de pla enrajolat per un mosaic de **Penrose** ben format. A la dreta, el començament d'un altre enrajolat.

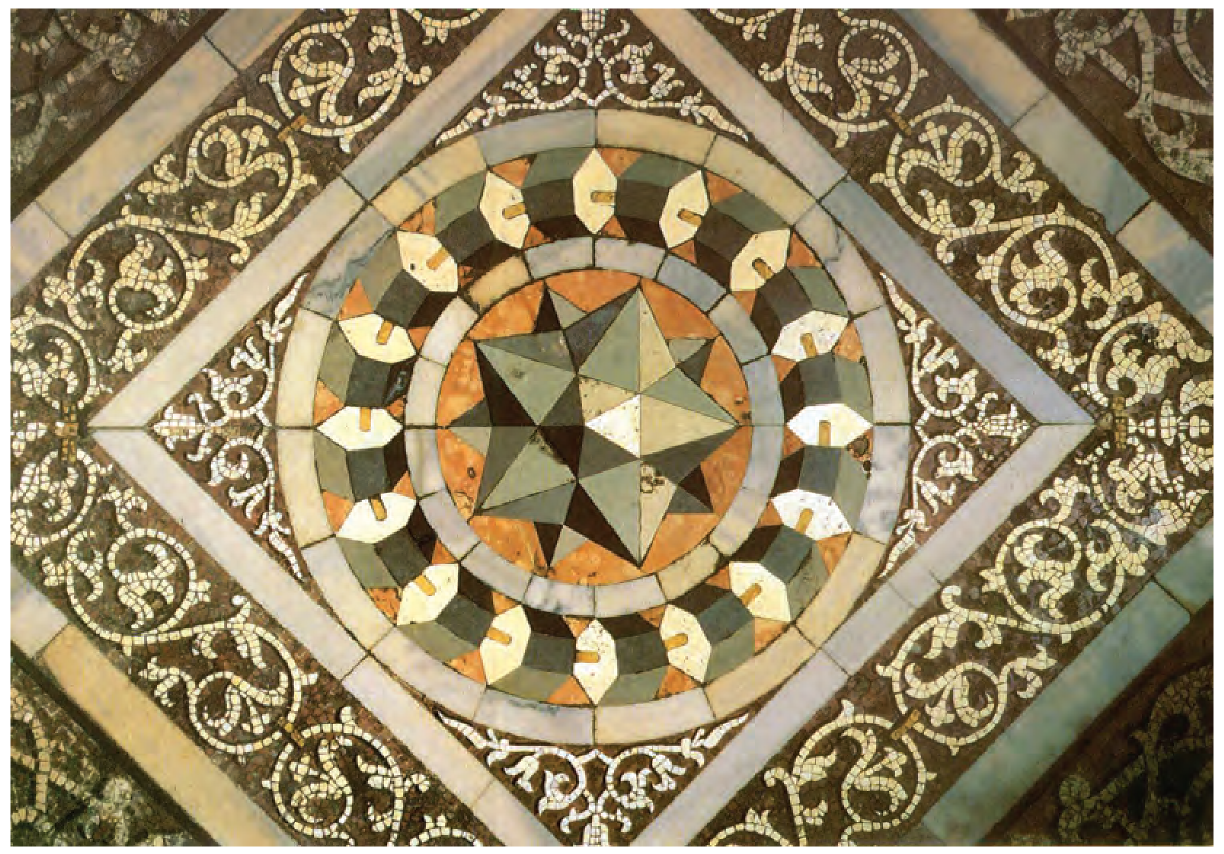


15 Decoració i simetria

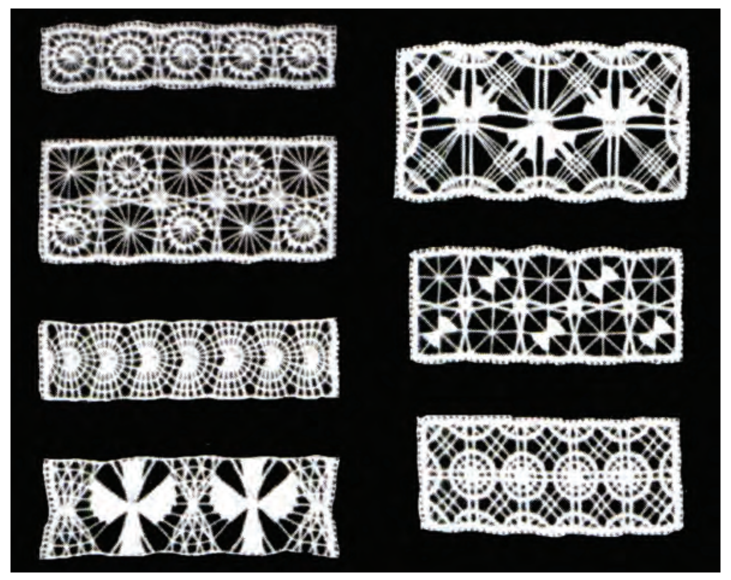
En els elements decoratius hi ha molta matemàtica, en especial figures, formes elementals i utilització de la simetria. I en totes les èpoques ha estat així. Aquí en tens algunes mostres, gaudeix-ne!

Dissenys precolombins.

Fotografia de la sèrie *La terra vista des del cel* de **Y. Arthus-Bertrand**.



Paviment de la catedral de Sant Marc, a Venècia, d'**Uccello**.

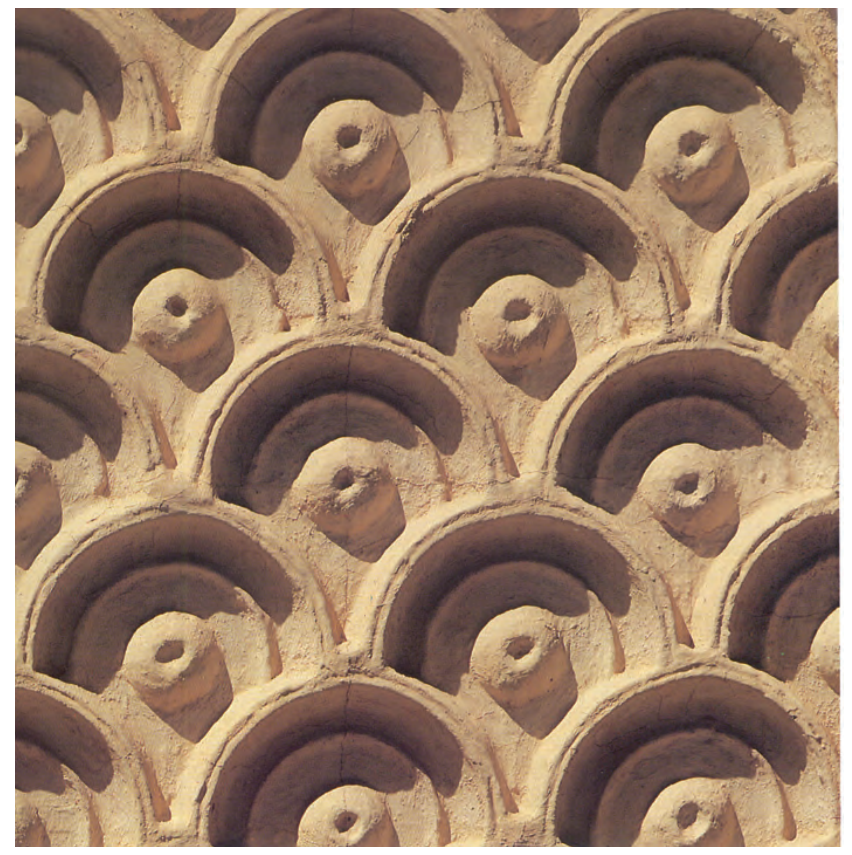


Encaixos geomètrics.

Llum de taula, de **K. Jucker** i **W. Wagenfeld**, en què s'aprecia el programa de la Bauhaus (mural 21): ús de materials industrials (metall i vidre), la transparència de la funció de cada component (per exemple, es veu per on puja el cable) i la forma estètica basada en l'harmonia de cossos geomètrics simples (esferes, cilindres, cubs...).

Llum penjat amb dispositiu de tracció, de **Marianne Brandt** i **Hans Przyrembel**, de l'escola Bauhaus.

Marianne Brandt.
Cendrer de llautó i niquelat.



Motiu decoratiu simètric als pavellons de la finca Güell, de **Gaudí**.

16 Publicitat (1)

L'aire que respirem està compost d'oxigen, nitrogen i publicitat.
R. Guerin

La publicitat és una part de l'art dels nostres dies i segurament una de les manifestacions d'aquest que més «veiem» encara que, molt sovint, ni ens n'adonem.

Ens fixarem en un aspecte d'interès i sabor matemàtic: els pictogrames de les marques comercials. Un fet destacable és que les empreses dediquen molt de temps i esforç a dissenyar i popularitzar els seus logotips i amb força freqüència tenen components geomètrics clars: és una mostra del fet que la geometria és important fora dels murs escolars.

Aquí en tens alguns pictogrames: mira'ls per veure què contenen i com es poden dur a terme. Pots llegir els comentaris, però procura fer-ho després d'haver-hi pensat una mica, almenys.

Si a un triangle equilàter se li treu, en cada un dels costats, un triangle equilàter més menut obtenim aquest resultat. Però també pot construir-se a partir d'un rombe que gira 60° i 120° entorn d'un dels seus vèrtexs. La sensació final és molt dinàmica, d'una mena d'hèlice que gira. I, a més, és la traducció del nom: *tres diamants*.

Mitsubishi

DIPUTACION D ZARAGOZA

En el pictograma de la Diputació de Saragossa hi ha uns quants triangles, perquè aquesta és la forma de la província. Però, a més, hi «veiem» alguna cosa més que només s'insinua: la inicial de Saragossa (en castellà, Zaragoza).

TOYOTA

Pot considerar-se que és un pictograma pla o la representació plana d'un cos a l'espai: semblant a la manera com es representa una esfera, però en el nostre cas és el cos que s'obté quan una el·lipse gira al voltant del seu eix més gran (que s'anomena *el·lipsoide*).

Deutsche Bank

DIA

En els dos logotips hi ha una publicitat subliminar: el signe de percentatge %. En el primer es fa referència al percentatge dels préstecs. En el segon cas vol indicar que els seus preus són barats.

RENAULT

Hi ha molts logotips que tenen a veure amb la cinta de Moebius (que resulta d'unir els extrems d'una cinta després d'haver-los fet un gir de mitja volta o de falses cintes de Moebius (que resulten d'enganxar-les després de fer-hi un gir diferent). Aquests en són dos exemples, però si t'hi fixes, pels carrers, en trobaràs molts d'altres. Com aconseguiries aquests logotips a partir d'una cinta?

Adia

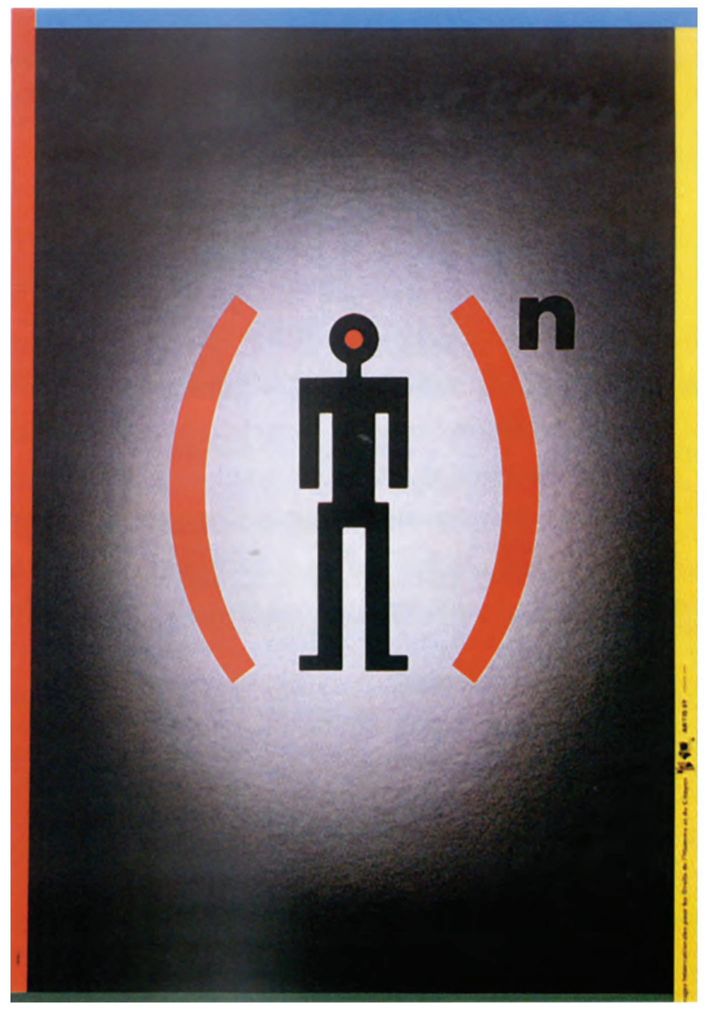
El pictograma d'Adia és una figura impossible: no hi ha manera de col·locar aquests tres llistons perquè formin una figura impossible (vegeu el mural 12). El d'Helvetia sembla la mateixa figura impossible, però no ho és.

Helvetia Seguros

17 Publicitat (2)

La publicitat actua de manera semblant a com creix l'herba. No ho veus mai, però cada setmana has de tallar la gespa.

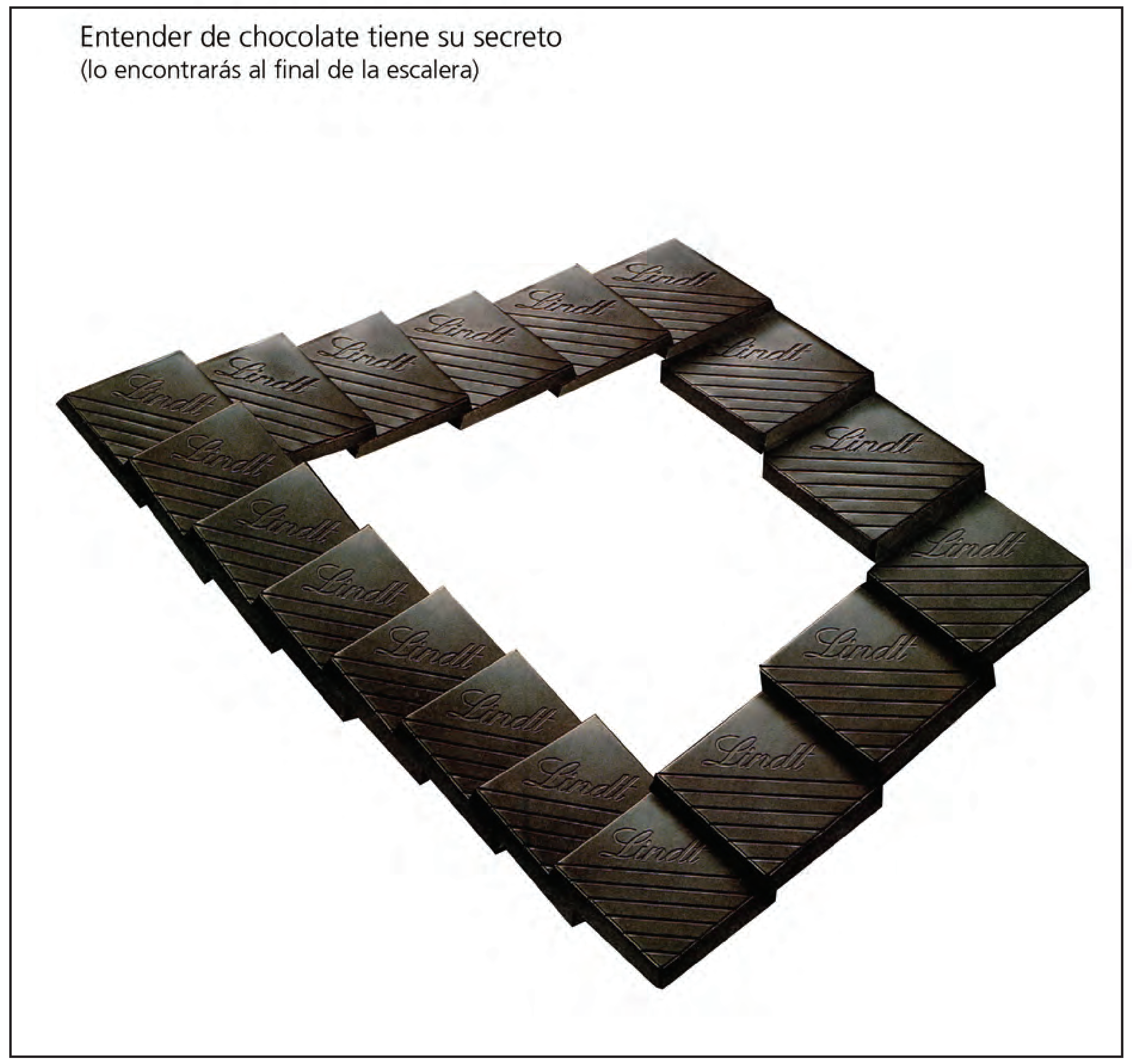
Andy Tharsis

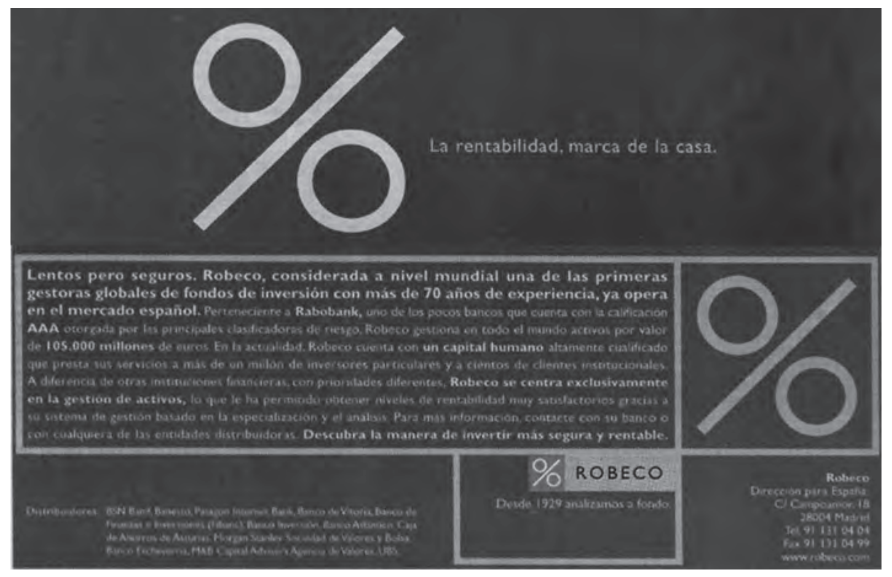


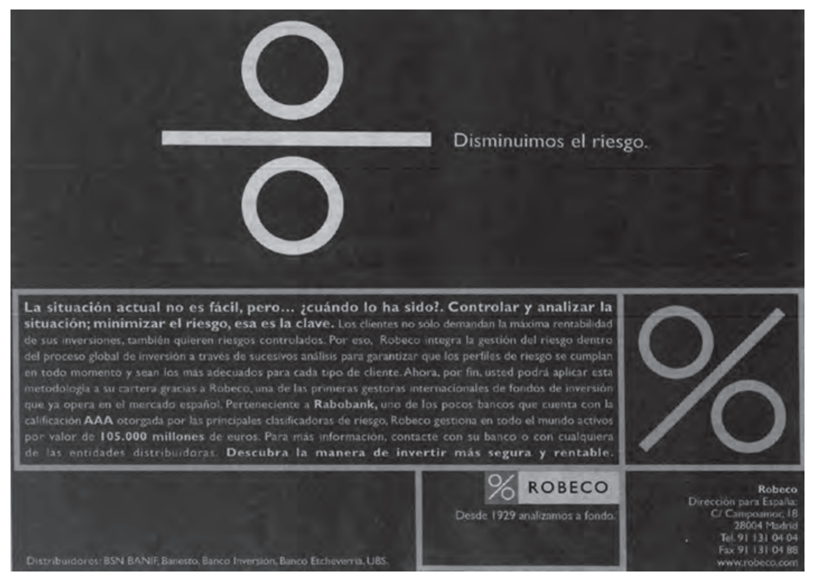
Cartell anunciador de l'Exposició del bicentenari dels Drets de l'Home i del Ciutadà, de **Pere Torrent**, conegut com a Peret.

Aquest cartell, que sorprèn per la seva senzillesa, juga amb una equació matemàtica: un pictograma humà entre parèntesis **elevat a l'enèsima potència** ens suggereix que la humanitat és el que compta.

A més de fer olor de xocolata, aquest anunci també «fa olor d'Escher». En efecte, en el mural **Objectes impossibles** pots trobar el gravat «Pujant i baixant escales», en el qual es basa aquesta imatge per accentuar l'hermètica reserva dels mestres xocolaters tradicionals: on acaba aquesta escala?







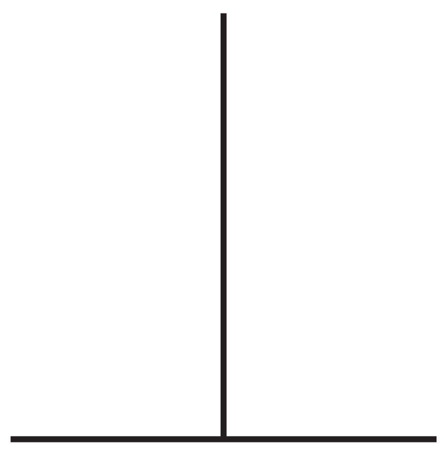
La publicitat de vegades usa la terminologia matemàtica. En aquest cas, de manera un xic confusa: per simbolitzar la disminució del risc, el percentatge es converteix en $\frac{0}{0}$, que és una **indeterminació**, una cosa molt arriscada, no trobes?

Una grafia que permet llegir sempre la marca tant si està de cap per amunt com de cap per avall; per això les peces de les dues marques exhibeixen clarament els seus logotips fins i tot si estan penjades en un penja-robes.

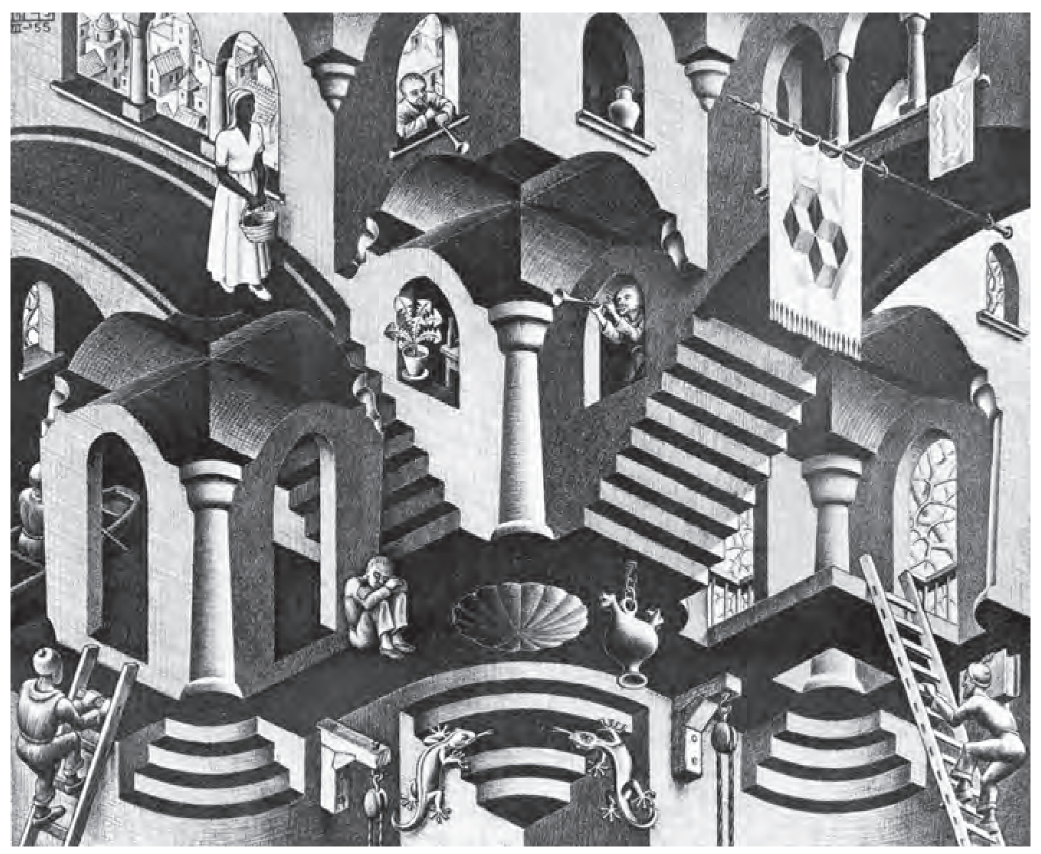
18 Il·lusions òptiques

La perspectiva és una convenció que de vegades presenta problemes. Observa, per exemple, el gravat de **William Hogarth** *Perspectives absurdes* fet el 1754.

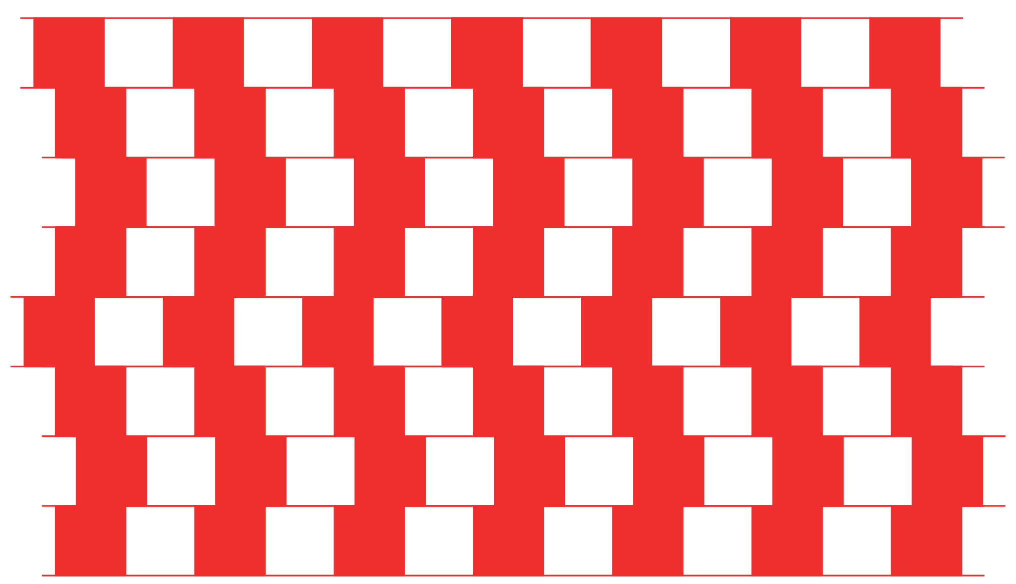
Els objectes horitzontals tenen una tendència a semblar més curts perquè les retines dels nostres ulls són corbes.



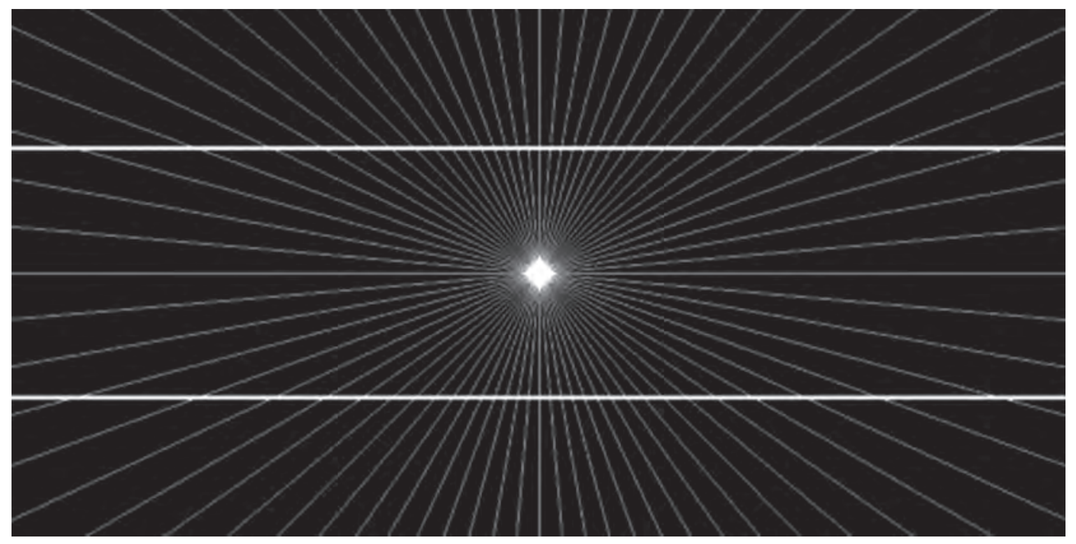
Si una imatge pot ser interpretada de més d'una manera, llavors la nostra ment fa oscil·lar la imatge entre les diferents interpretacions.



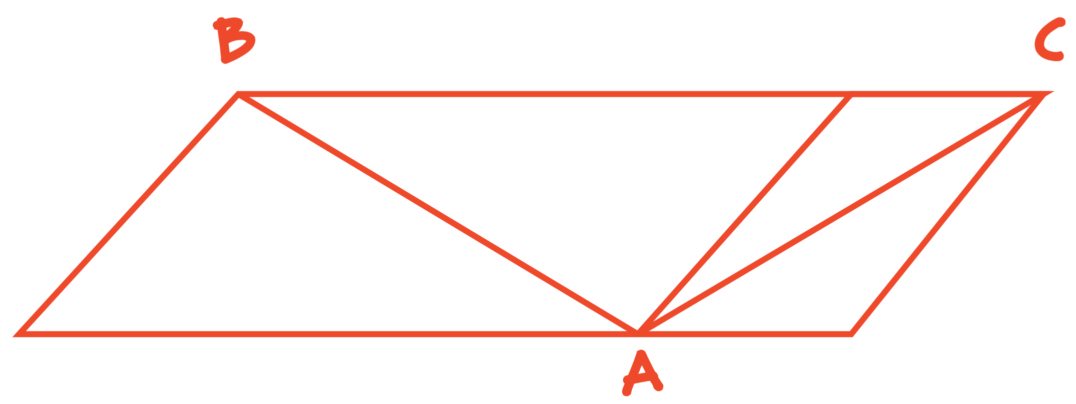
Hogarth va jugar en aquest gravat amb les lleis de la perspectiva i les il·lusions òptiques. Segur que hi pots trobar algunes paradoxes.



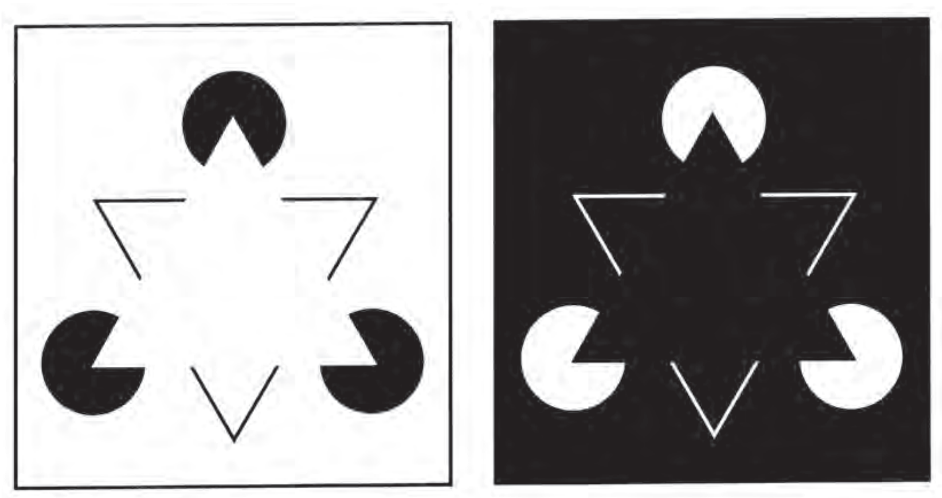
Mira les línies horitzontals des d'un lateral del mural i veuràs que són paral·leles.



Les rectes paral·leles dibuixades sobre un feix de rectes convergents en un punt semblen corbar-se en augmentar la seva distància al centre.

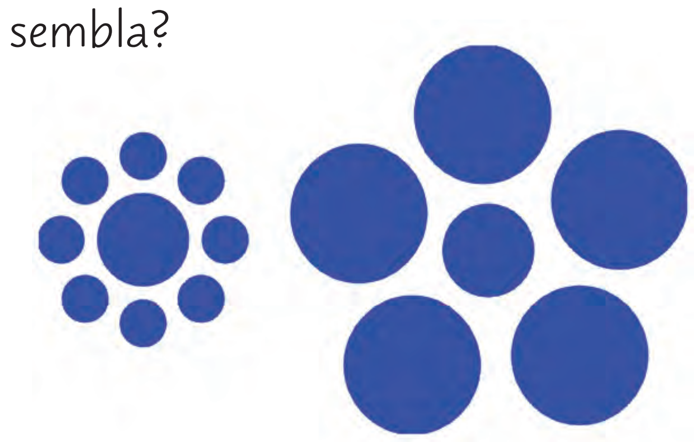


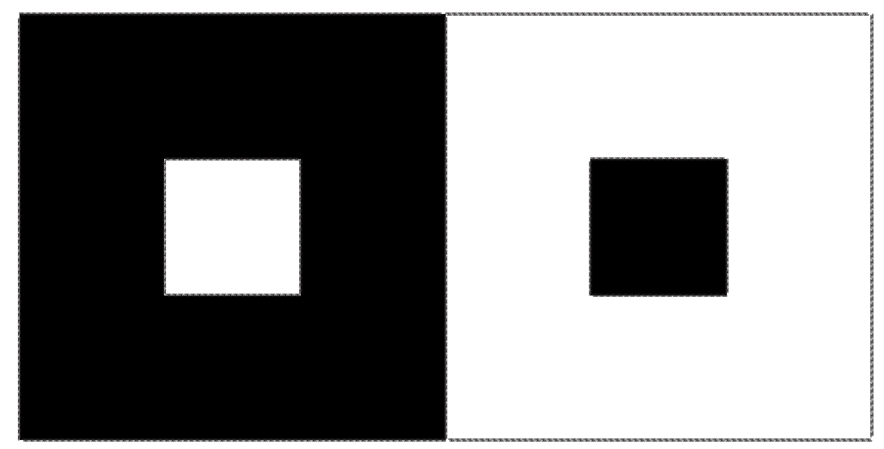
Els segments AB i AC tenen la mateixa longitud, encara que ens sembli veure una altra cosa.



El teu ull tendeix a completar les figures suggerides. En aquesta figura veus triangles que en realitat no estan dibuixats.

Els cercles centrals són de la mateixa mida, ho sembla?





Sobre la retina, la imatge d'una regió clara envaeix la imatge d'una regió fosca i fa que la regió fosca sembli més petita.

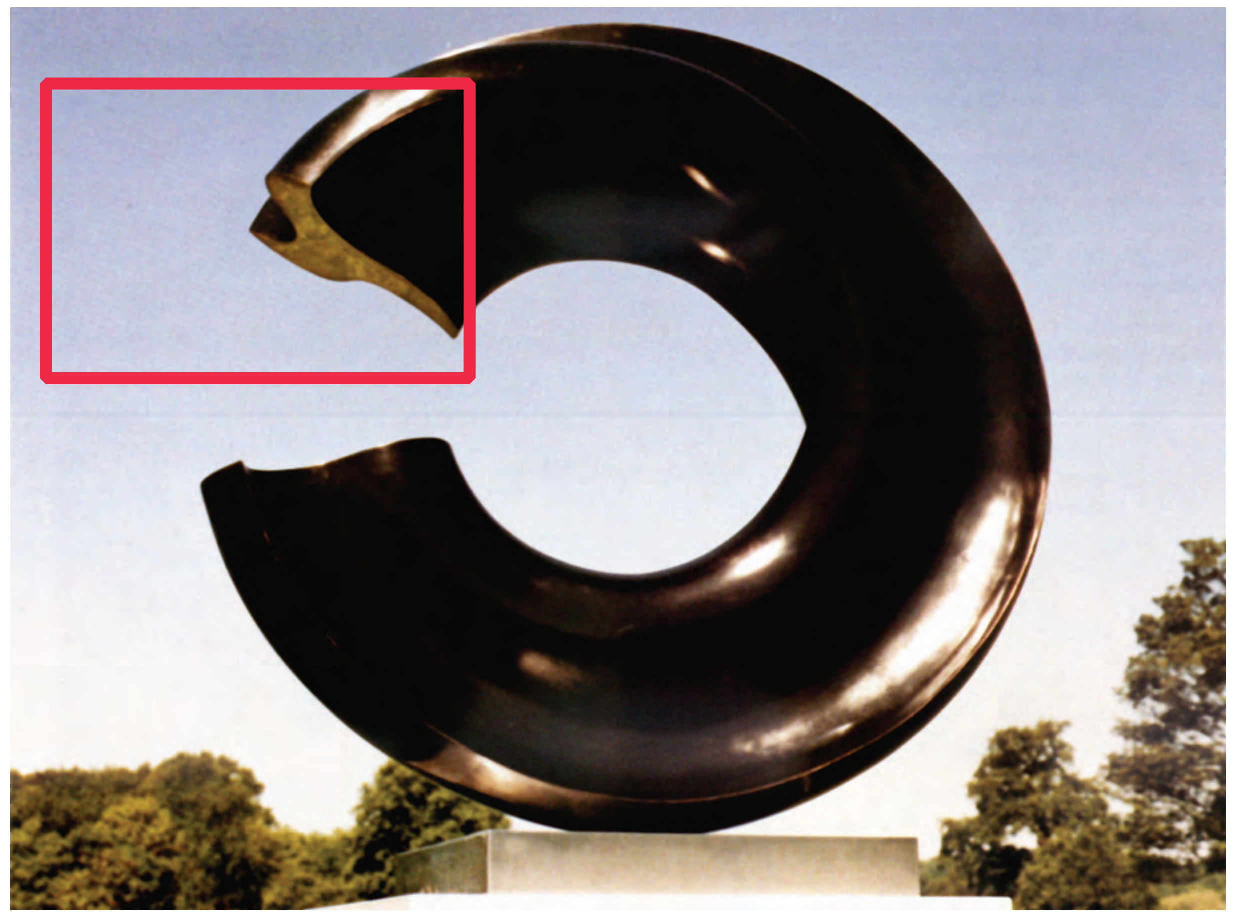
En situar-se sobre una trama en perspectiva, els objectes «llunyans» semblen més grans que els «pròxims». Pots comprovar que els dos personatges són de la mateixa mida.

19 Escultura (1)

Amb el temps vaig descobrir que forma i espai són exactament la mateixa cosa. No es pot comprendre l'espai sense comprendre la forma.

Henry Moore

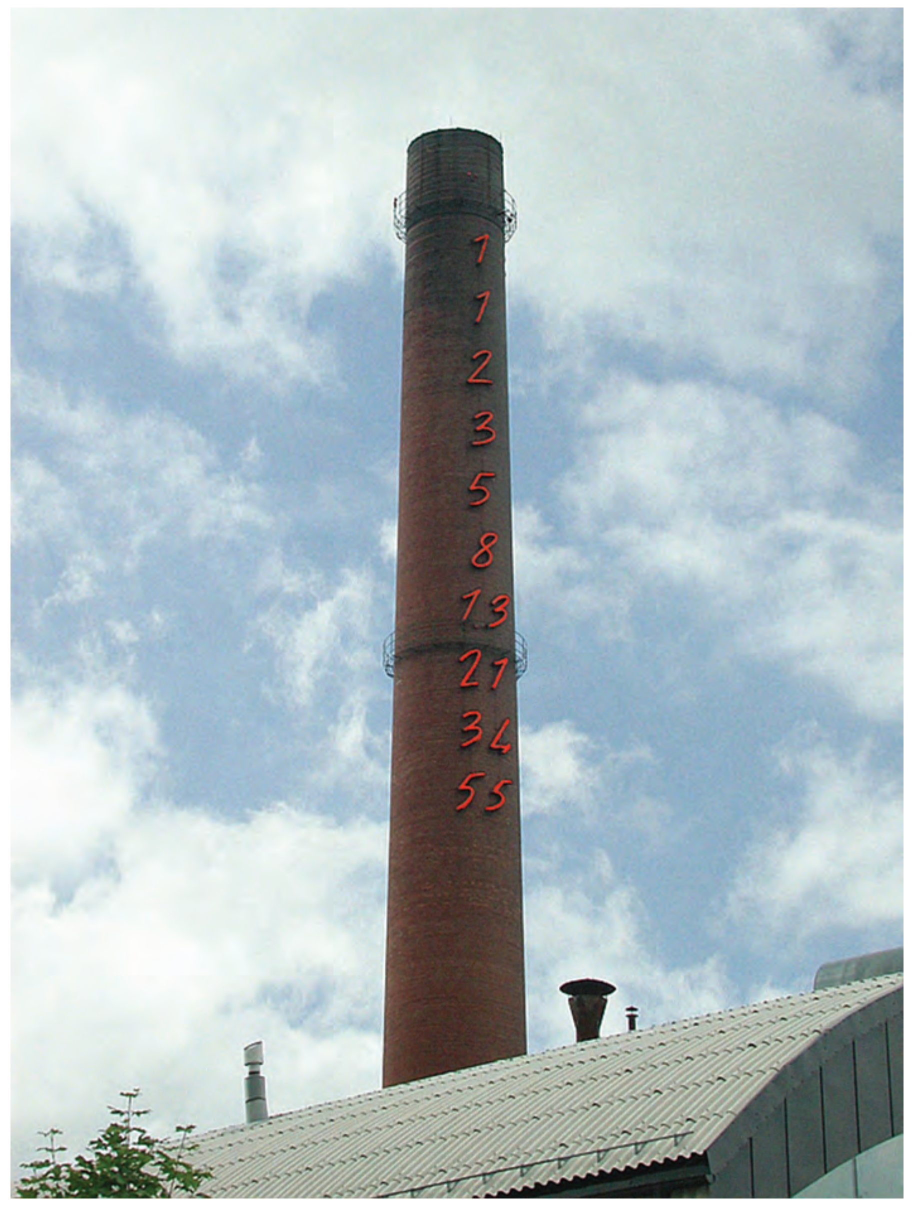
A la plaça d'Europa de Saragossa hi ha aquesta escultura de fort contingut geomètric.



Música de les esferes

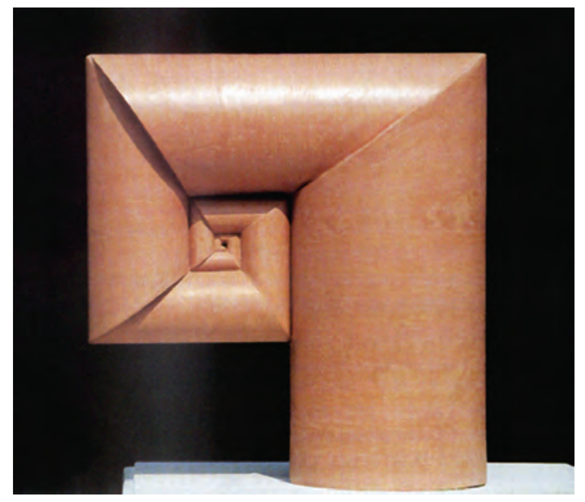
John Robinson al·ludeix ben sovint a les matemàtiques en les seves escultures. En aquesta, la secció té la forma de l'ocellet de l'Alhambra (mural 14). Si segueixes els vèrtexs de l'ocellet, veuràs que el volum és un *nus trèvol*, una variant de la cinta de Moebius.

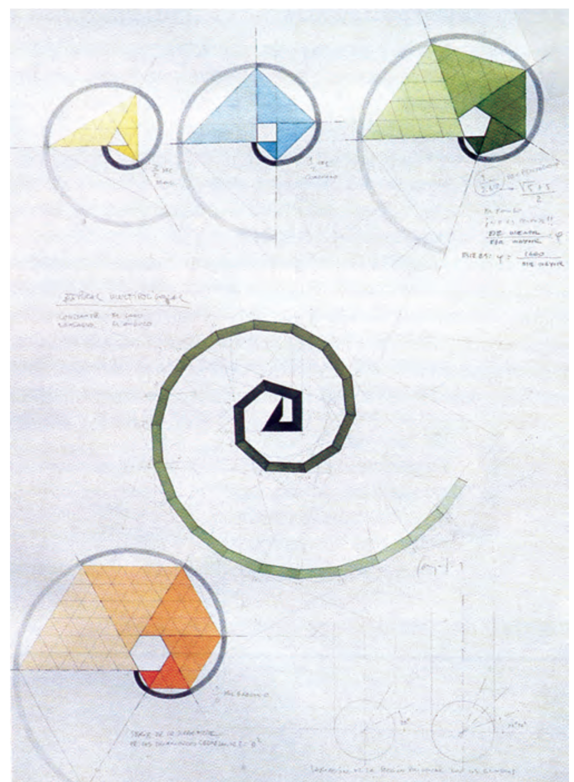
En l'obra d'**Alonso Márquez** es poden trobar referències a la **cinta de Moebius**.
Esquerra: *Trobades i manca de trobades*.
Dreta: *Etern retorn*.

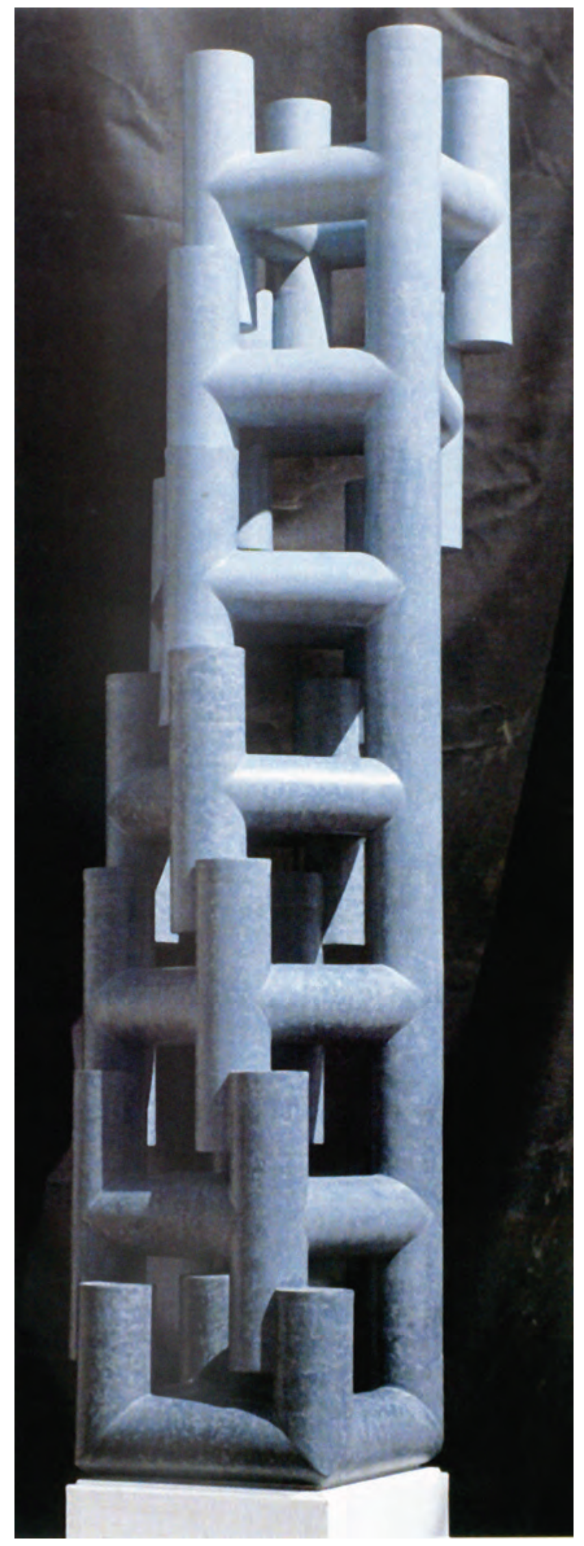


Successió de Fibonacci 1-55
En aquesta xemeneia a Turku (Finlàndia) podem trobar els primers nombres de la successió de Fibonacci en llums de neó de 2 metres d'alçària. Per al seu autor, l'italià **Mario Merz**, és «una metàfora de la cerca humana de l'ordre i l'harmonia entre el caos».

Espiral 2 arrel de 2
El rectangle «arrel de 2» (el de la sèrie DIN del paper) dividit successivament per 2 dona lloc a aquesta espiral. **Javier Carvajal** calcula els angles d'unió, complementaris, de $54^{o}\ 44'$ i $35^{o}\ 16'$.





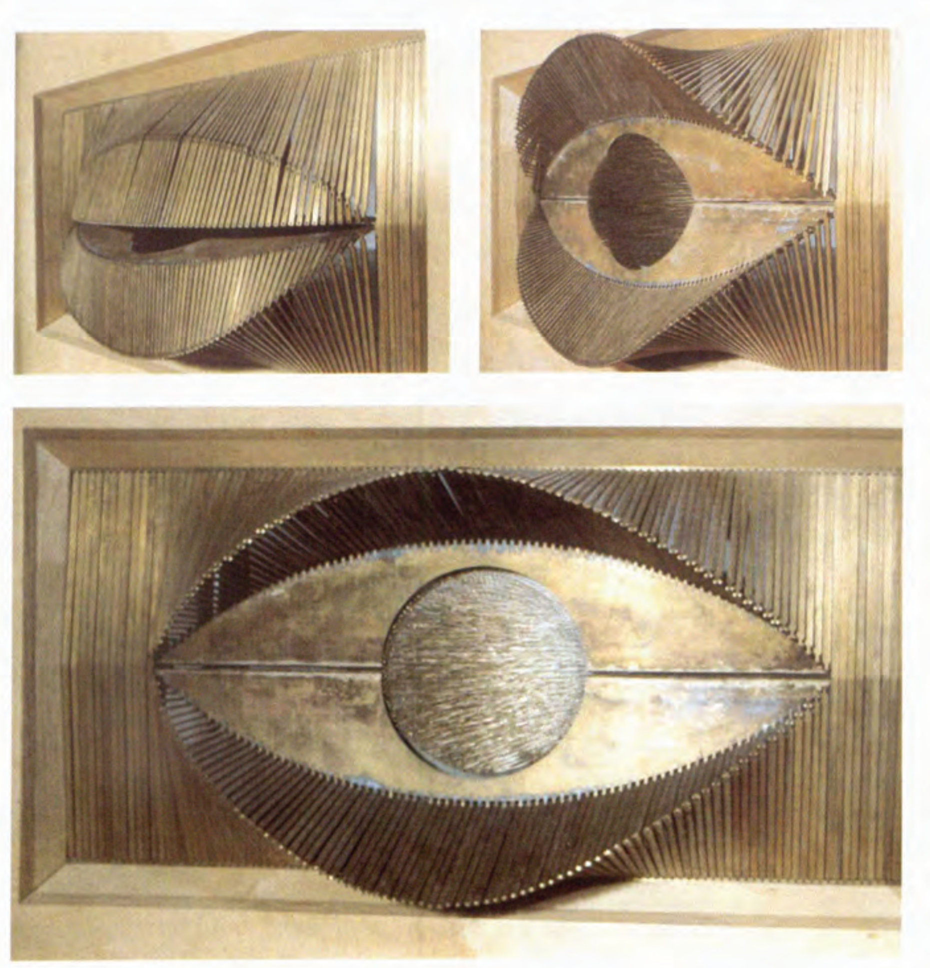


J. Carvajal ha aprofundit des dels anys 90 en la relació entre *Nombre i Forma* en moltes de les seves escultures.
Esquerra i centre: *Espiral multipoligonal* i dibuix preparatori. Els angles que els successius segments formen entre si corresponen als de la sèrie de polígons regulars: triangle (60^{o}), quadrat (90^{o}), pentàgon (108^{o})...
Dreta: *Torre de cubs girats*.

20 Escultura (2)

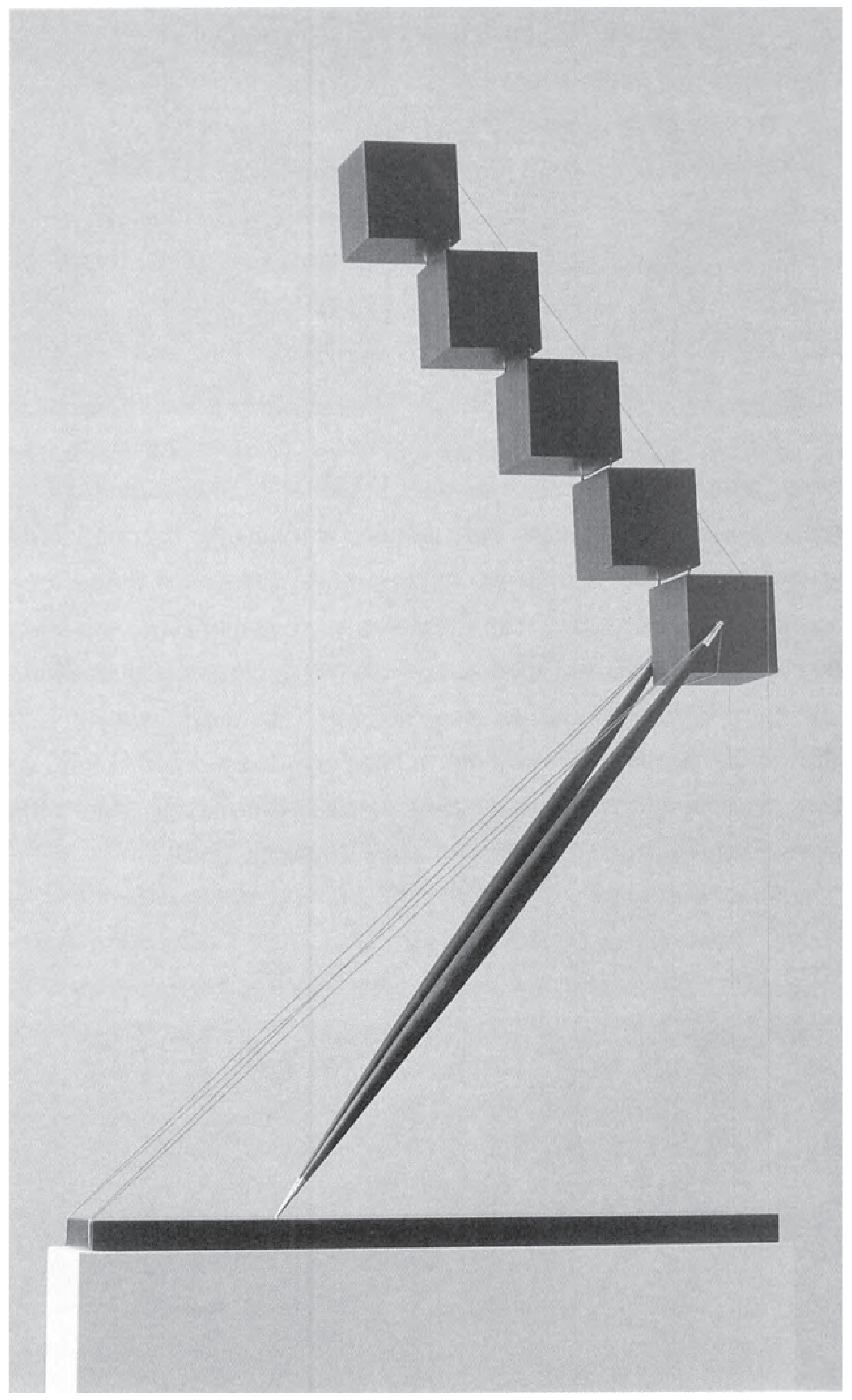
No hi ha millor fons per a una escultura que el cel perquè es contrasta una forma sòlida amb el seu contrari: l'espai.

Henry Moore (escultor anglès)



S9 Winking Eye (Ull parpellejant), 1985. Llautó. **Santiago Calatrava**.

S55 S.T., 1995. Banús i acer cromat. **Santiago Calatrava**.

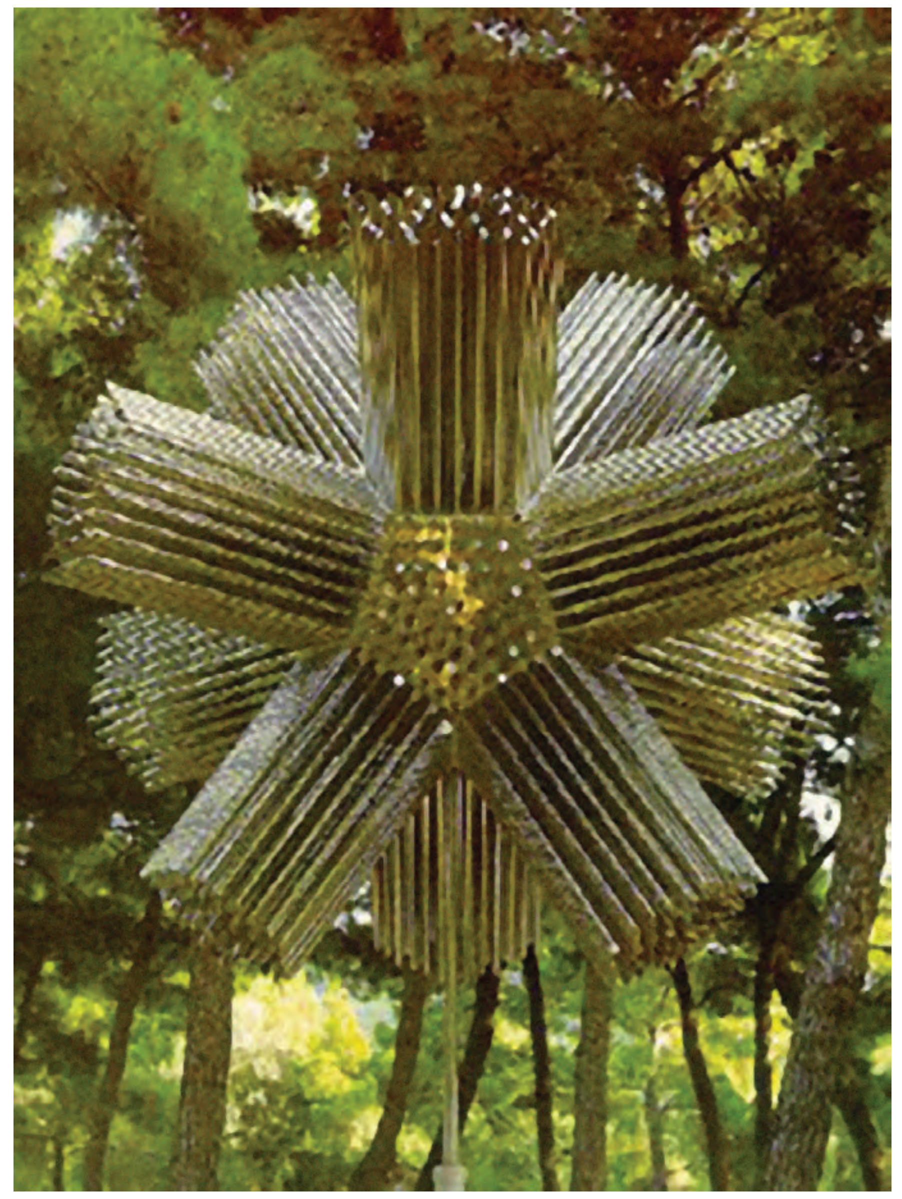


Monument a la UNESCO, 1986. Obra de **J. Jobin** i **J. Vallières**. Aquesta escultura del Quebec commemora la declaració de la ciutat Patrimoni de la Humanitat per la UNESCO. Reprodueix en 3D el logotip de Patrimoni de la Humanitat: un cercle (una esfera que simbolitza el món) que conté el quadrat (cub), que representa l'establiment de la humanitat.

En el centre del cub hi ha un octaedre de vidre que representa el Quebec al cor de la humanitat.

Porta de la Il·lustració, Madrid, 1990. És un monument d'acer inoxidable dissenyat per **Andreu Alfaro** que per mitjà de semicercles reinventa les tradicionals portes d'entrada a les ciutats.

Oteiza, *Variant ovoide de la desocupació de l'esfera*, Bilbao.



Com una estrella (Estrella varada), Alacant, 1978. **Sempere** i el tema de l'estrella aconseguit a partir d'un dodecaedre de les cares del qual surten varetes d'acer i són més llargues les de la cara superior.

21 Arquitectura

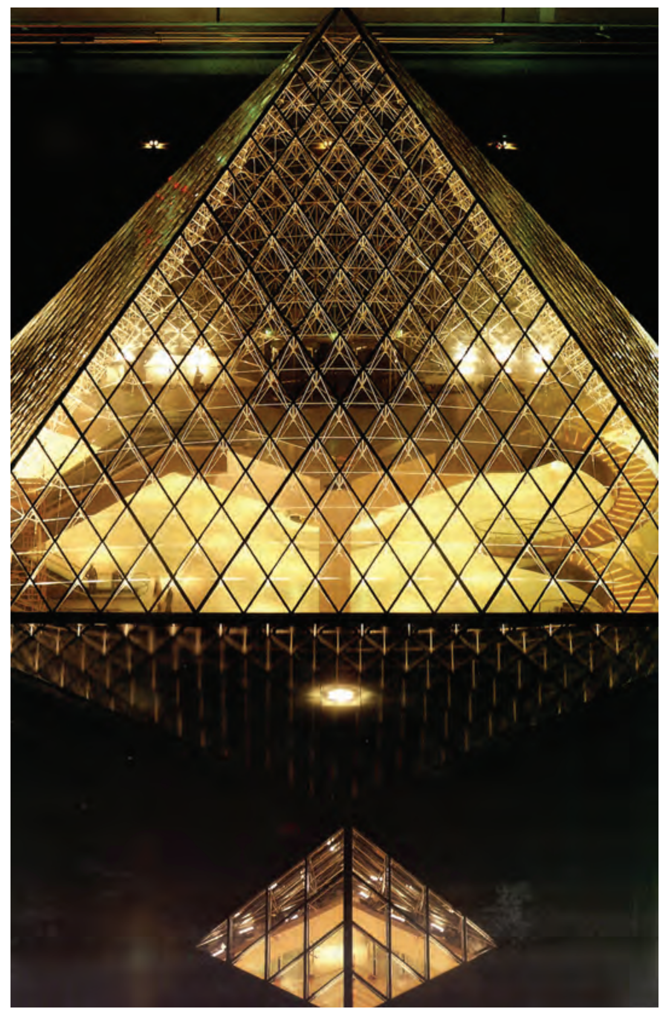
El ser humà arriba al món amb dos ulls, però només després d'un ensenyament pacient aprèn a veure-hi.

Walter Gropius (arquitecte de la Bauhaus)

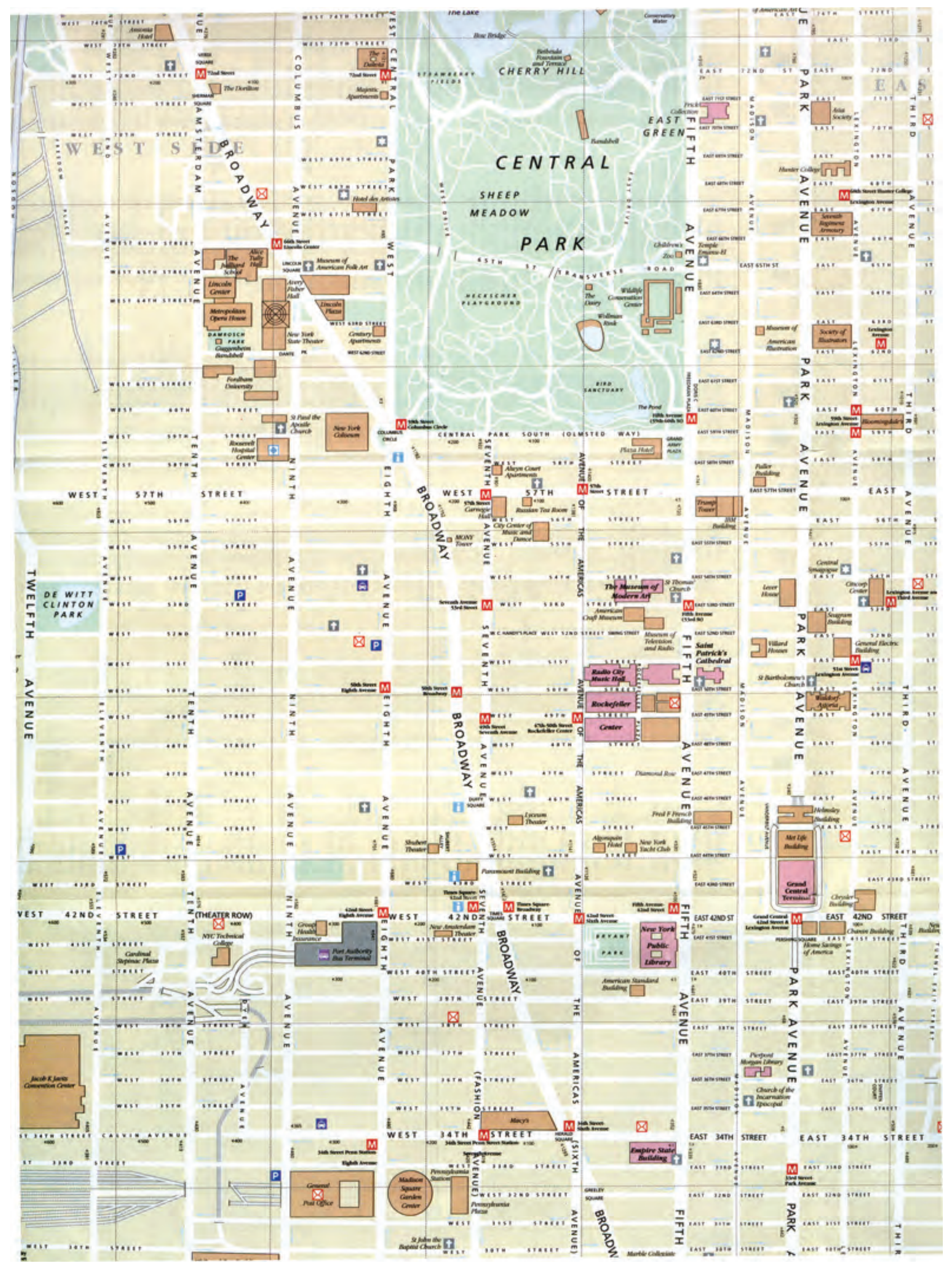
Catedral de Toronto
de **Santiago Calatrava**.

Hiperboloide
en un edifici del port
de Kobe (Japó).

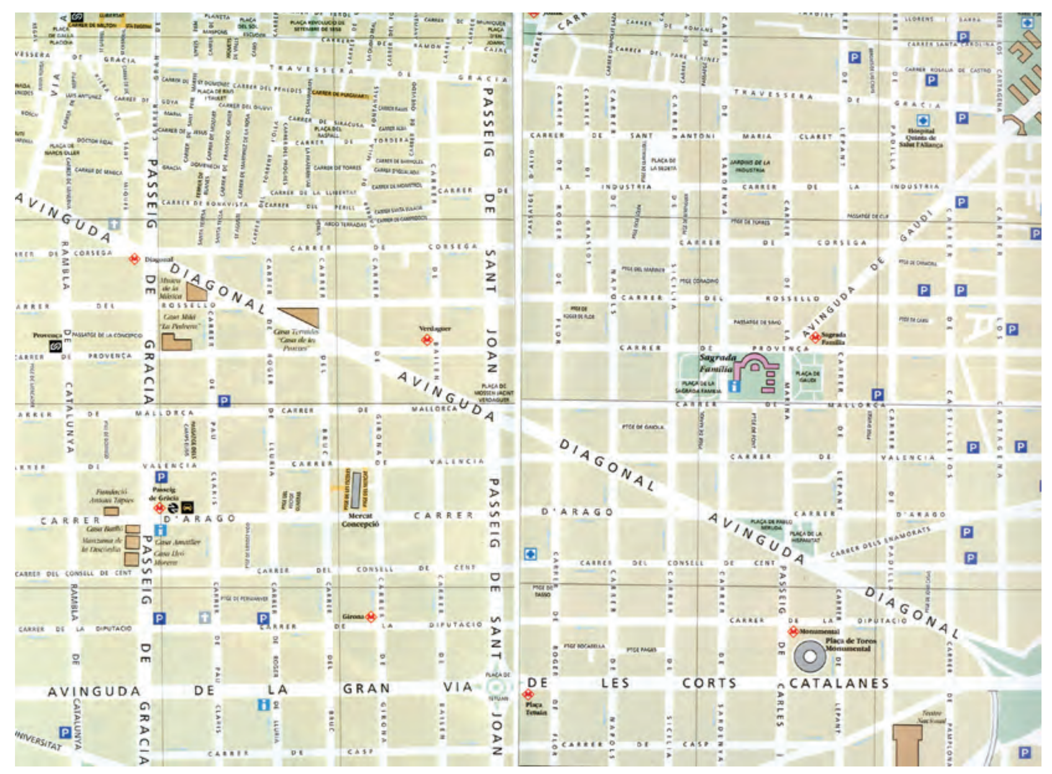
Ben sovint observem figures elementals en la resolució de dissenys arquitectònics.
A dalt, el volum cúbic de la *Grande Arche* a la Défense (París) del danès **J. O. Van Spreckelsen**. A baix, les piràmides d'accés al museu del Louvre d'**I. M. Pei**.



L'escola alemanya de la **Bauhaus** va animar en la dècada de 1921-1930 la seva idea de l'«obra d'art unitària» amb nombrosos motius matemàtics. En les seves construccions, com en la seva activitat docent, concorrien la tècnica, el disseny, l'art i l'artesania. Aquí, hi veiem un detall interior i l'exterior de la casa Sommerfeld (arquitectes **Gropius** i **Meyer**), el primer gran projecte comú de la Bauhaus.



L'urbanisme reflecteix també en alguns casos el racionalisme matemàtic. L'**Eixample de Barcelona** (a baix) o el disseny dels carrers i avingudes a **Manhattan** en són bons exemples.



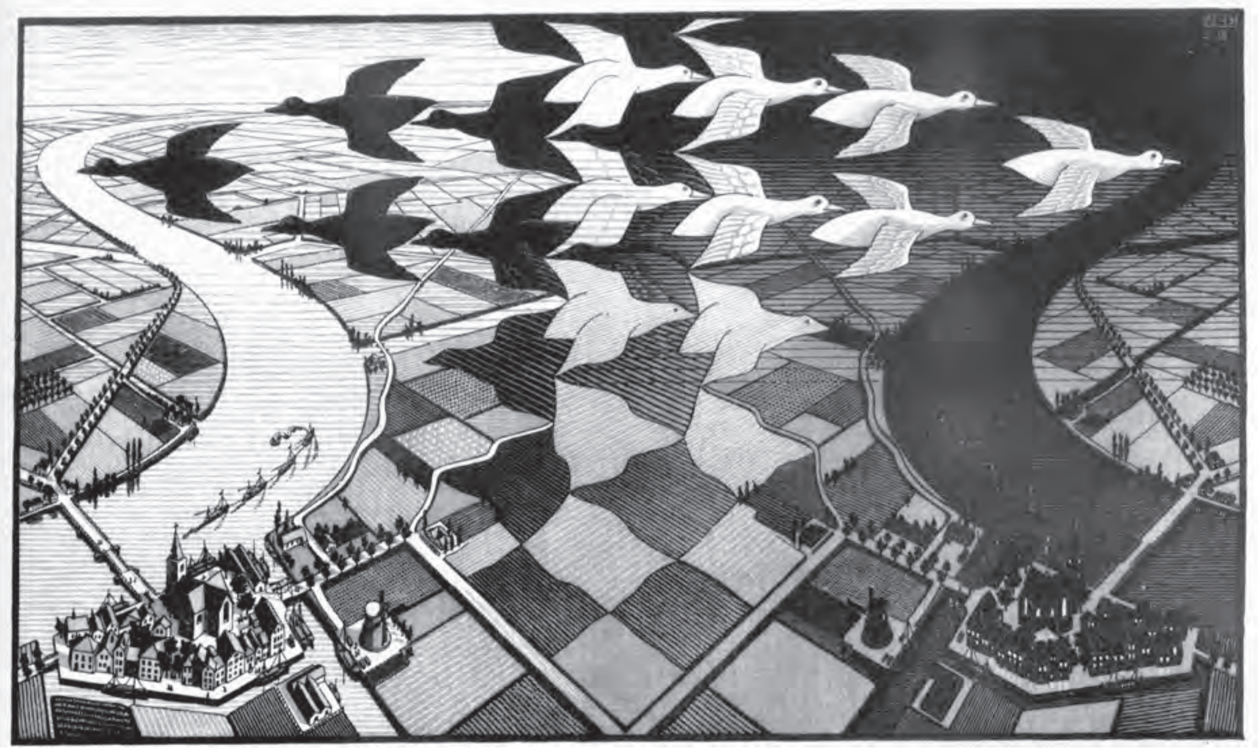
M.C. Escher

Les làmines d'Escher tenen un toc d'estranyesa i encara d'anormalitat que fascinen.

Bruno Ernst

Maurits Cornelis **Escher** (1898-1972), dibuixant i gravador holandès, ha resultat durant molt de temps un artista difícil de classificar. Mentre la crítica d'art l'ignorava, generalment, alguns matemàtics se sorprenien de com Escher aconseguia plasmar l'essència de certs conceptes abstractes i el gran públic no ha deixat d'adquirir les seves làmines, un autèntic supervendes mundial.

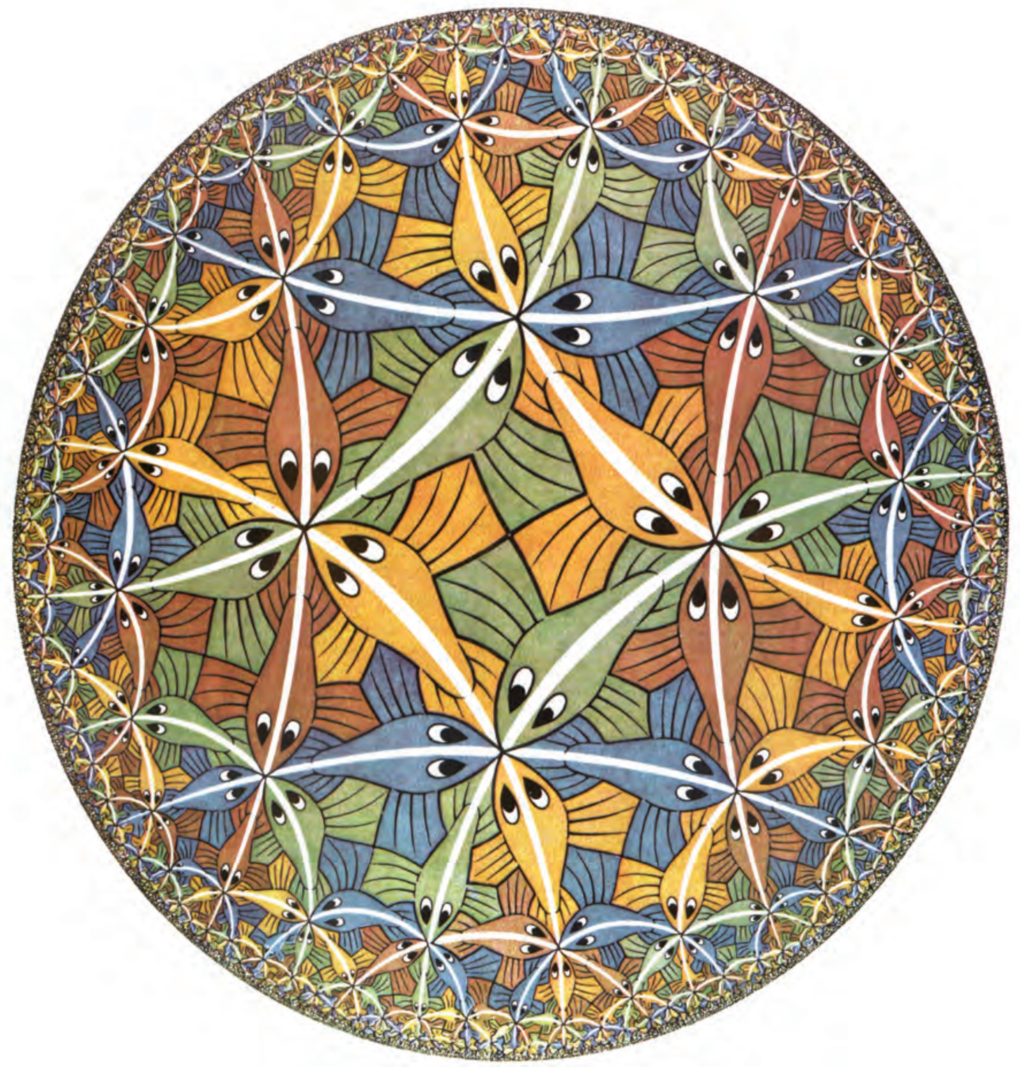
Cap altre tema no va apassionar tant Escher com la **partició periòdica de superfícies** –recorda que es tracta també als plafons sobre **Mosaics**–. El 1936 va visitar l'Alhambra de Granada i en va estudiar detingudament els ornaments. Després d'experimentar amb la translació, la reflexió i la rotació de motius sorgeixen obres com *Dia i nit* (1939).



Dia i nit (1939). Possiblement, la més popular de les làmines d'Escher. La partició regular del pla (els ocells blancs i negres es complementen), la simetria entre la ciutat nocturna i la diürna, els camps conreats, superfícies que es converteixen en ocells, volums i les idees de canvi i cicle (metamorfosi) presents en ella resumeixen alguns dels temes preferits de l'artista.

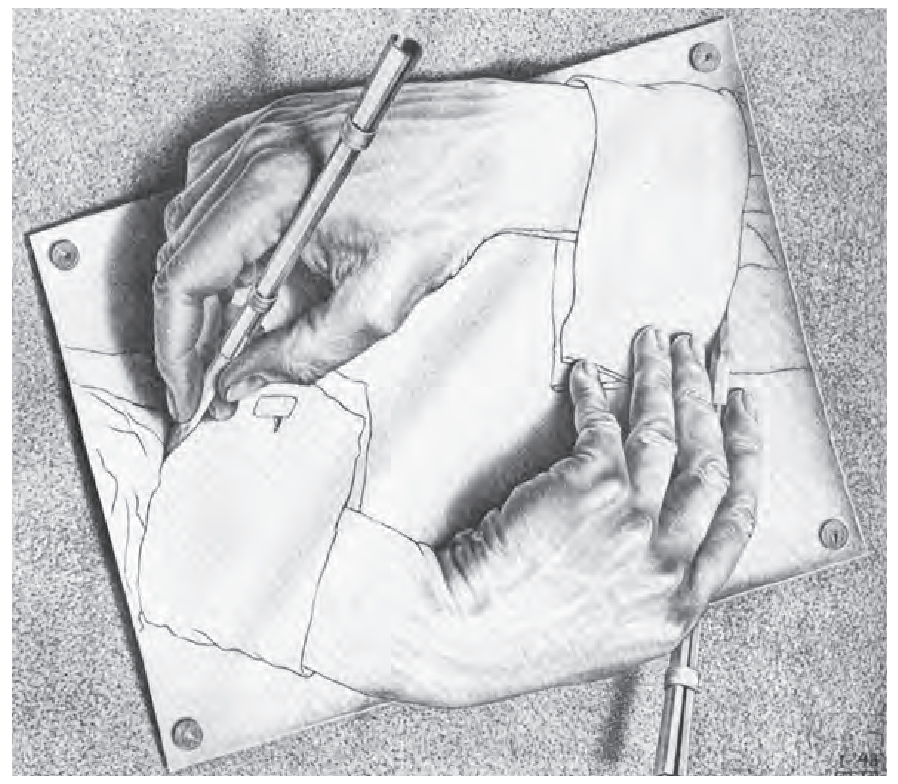
A *Dalt i baix* (1947) l'objecte d'estudi sembla la *relativitat* de la perspectiva. Els conceptes de perspectiva renaixentista es porten al límit (el punt de fuga a la vertical –zenit– o les paral·leles corbades convergents) per sumir-nos en la perplexitat. Escher «juga» amb l'estructura de l'espai.

L'aproximació a l'infinit és una altra temàtica recurrent en la seva obra. Com a exemple, aquí tens el gravat en colors *Límit circular III*.



Els peixos es fan infinitèsims a les vores del cercle. Al llarg de cada corba, peixos del mateix color creixen per decréixer després d'allunyar-se del centre. Observa que també es recobreix el pla.

Escher explora també el dibuix com a engany: l'artista en gaudeix i l'espectador es deixa enganyar conscientment, com quan contemplem els trucs d'un mag. Alguns d'aquests jocs els il·lustren les làmines *Mans dibuixant* (1948) i *Galeria de gravats* (1956).



A *Mans dibuixant*, Escher –que escrivia amb la dreta, però dibuixava i gravava amb la mà esquerra–, es delecta en el concepte de simetria; el paper, superfície, conté les mans, que tenen volum, per poder dibuixar les mans, pintades, ...en el paper! (allò cíclic, com les metamorfosis, és un altre dels temes freqüents en **M. C. Escher**). Tot, per provocar l'engany i la sorpresa en els espectadors.

Si descrivim el quadre *Galeria de gravats* seguint el sentit de les agulles del rellotge des del cantó superior esquerre, sentirem el vertigen de ser dins, de ser fora, de veure una superfície plana, un espai tridimensional...

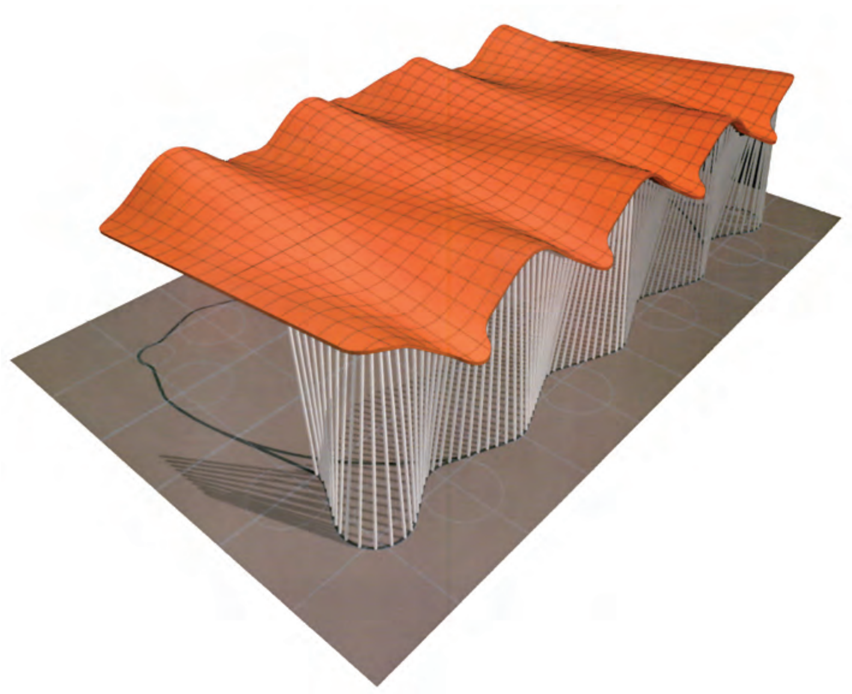
23 Gaudí (1)

En l'execució de superfícies, la geometria no complica la construcció sinó que la simplifica. El més difícil és l'expressió algebraica de les coses geomètriques ja que aquesta, com que no es pot expressar completament, dona lloc a malentesos que desapareixen en ser encarats amb els cossos a l'espai.

Antoni Gaudí

Gaudí (1852-1926) és un dels arquitectes més coneguts del món i un dels reclams turístics del nostre país, en particular de la ciutat de Barcelona. I més després de la celebració de l'any 2002 com a Any Gaudí.

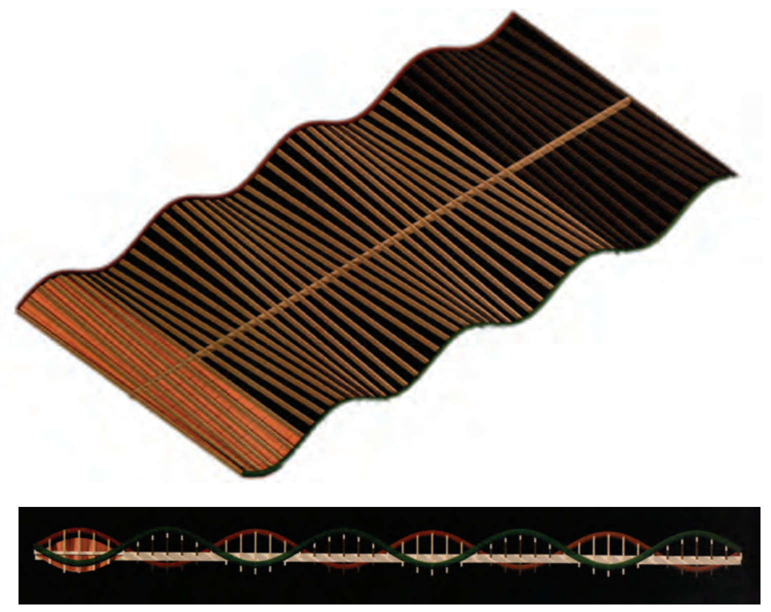
De **Gaudí** es reconeix la seva cura en l'adopció de formes naturals, en l'adaptació a les formes del terreny on construïa, en la utilització de la llum o en el sentit espiritual o transcendent de moltes de les seves obres. Però per sota de tot això hi havia un elaborat i acurat treball matemàtic. Tant, que ell es referia a si mateix com un «geòmetra»: «Jo soc geòmetra, que vol dir sintètic».

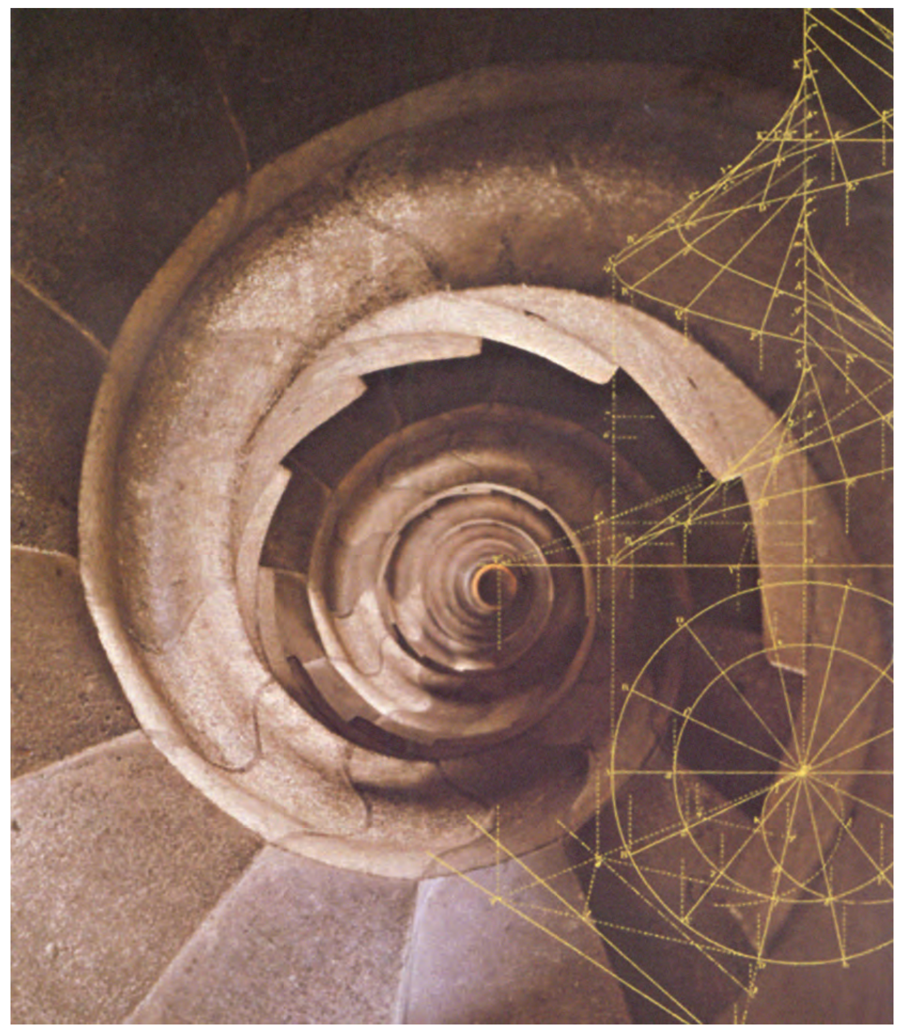


La Sagrada Família des de la *Casa Milà* –La Pedrera– (Barcelona).

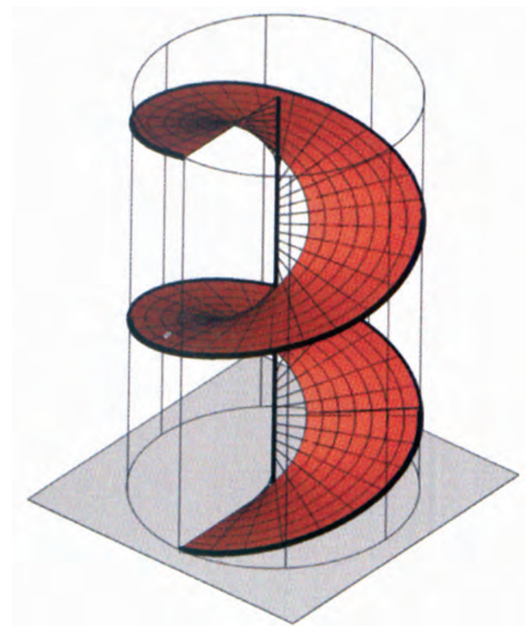
La utilització de la recta i el seu sentit de l'infinit les va emprar ben sovint en **superfícies reglades** (*superfícies engendrades per una recta que es mou al llarg d'una o diverses corbes*) i fou el primer arquitecte que es va adonar del seu interès arquitectònic.

Coberta i façana de les escoles de la Sagrada Família, constituïdes per superfícies reglades –rectes recolzades en sinusoides–.





Escala de la Sagrada Família en helicoide, una altra superfície reglada.



Hiperboloide d'una fulla, obtingut per revolució d'una hipèrbola al voltant del seu eix. Columna al parc Güell (Barcelona).

24 Gaudí (2)

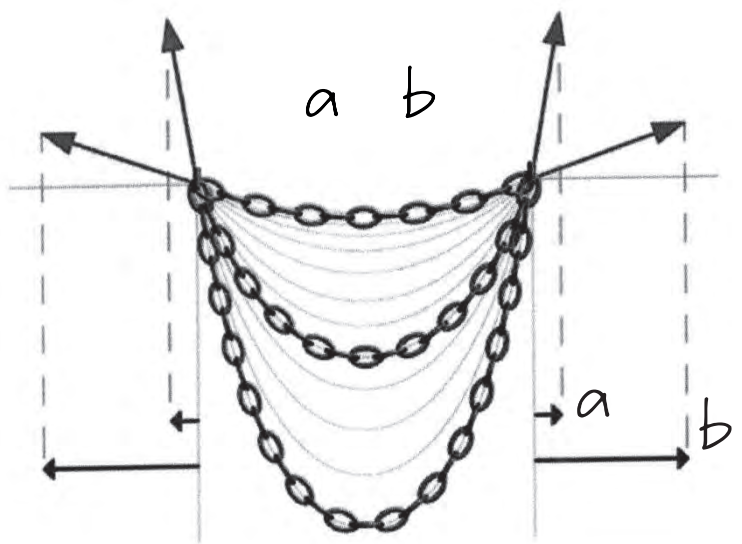
La corba tancada és el sentit de la limitació, així com la recta és l'expressió de l'infinit.
Antoni Gaudí

Arcs catenaris a la planta baixa del col·legi de les Teresianes (Barcelona).

L'arc catenari –la **catenària**– és la forma que adopta una cadena quan es penja de dos punts i només suporta el seu propi pes.

Si la càrrega que suporta és horitzontalment uniforme, en penjar-la de dos punts adopta la forma de **paràbola**. Si suporta diferents càrregues puntuals, adopta la forma d'**arc funicular**.

Quan a aquests arcs penjats els fem el tomb, obtenim els perfils de les cobertes que amb la mateixa longitud, suportarien les mateixes càrregues.

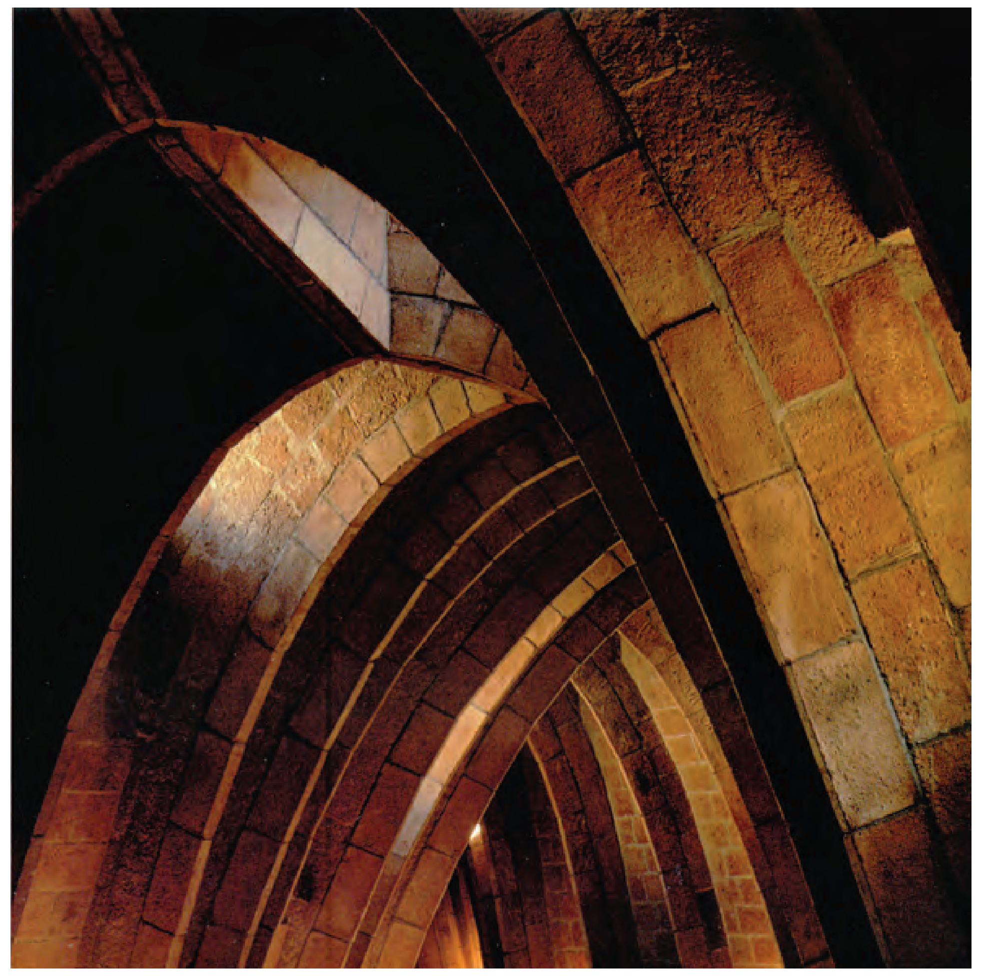


Entrada i sala d'arcs parabòlics al palau Güell (Barcelona).

Arcs catenaris a la Casa Batlló (Barcelona).

Com més esvelts són aquests arcs, menys empenta lateral descarreguen sobre els murs i menys contraforts calen.

Malgrat l'òptima qualitat de l'arc catenari pel que fa a resistència, era poc emprat per raons estètiques abans que Gaudí el fes servir amb profusió en tota la seva obra.



Arcs catenaris a La Pedrera.

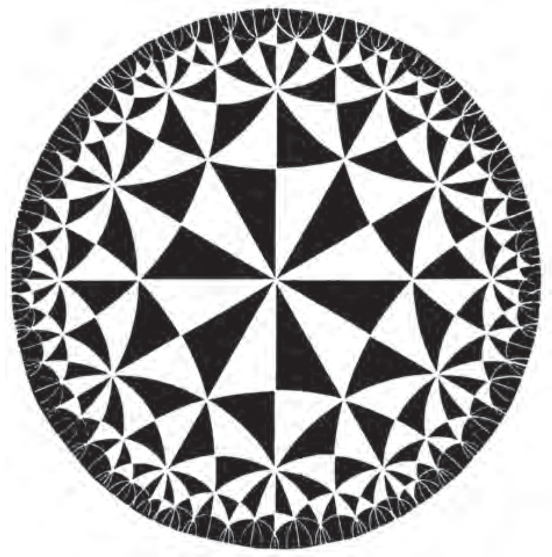
Espirals al sostre de La Pedrera.

Si debanem un fil prèviament bobinat en un cilindre o con es poden construir belles espirals.

Les **espirals** arquimediana i logarítmica, que són freqüents en la natura (banyes d'animals, caragols de mar, gira-sols...) també s'usen en l'obra de Gaudí amb fins decoratius: reixes de forja, balcons, mosaics...

I, per descomptat, totes les còniques –circumferències, el·lipses, paràboles i hipèrboles– les trobem com a seccions o talls de les superfícies reglades mostrades al mural Gaudí (1).

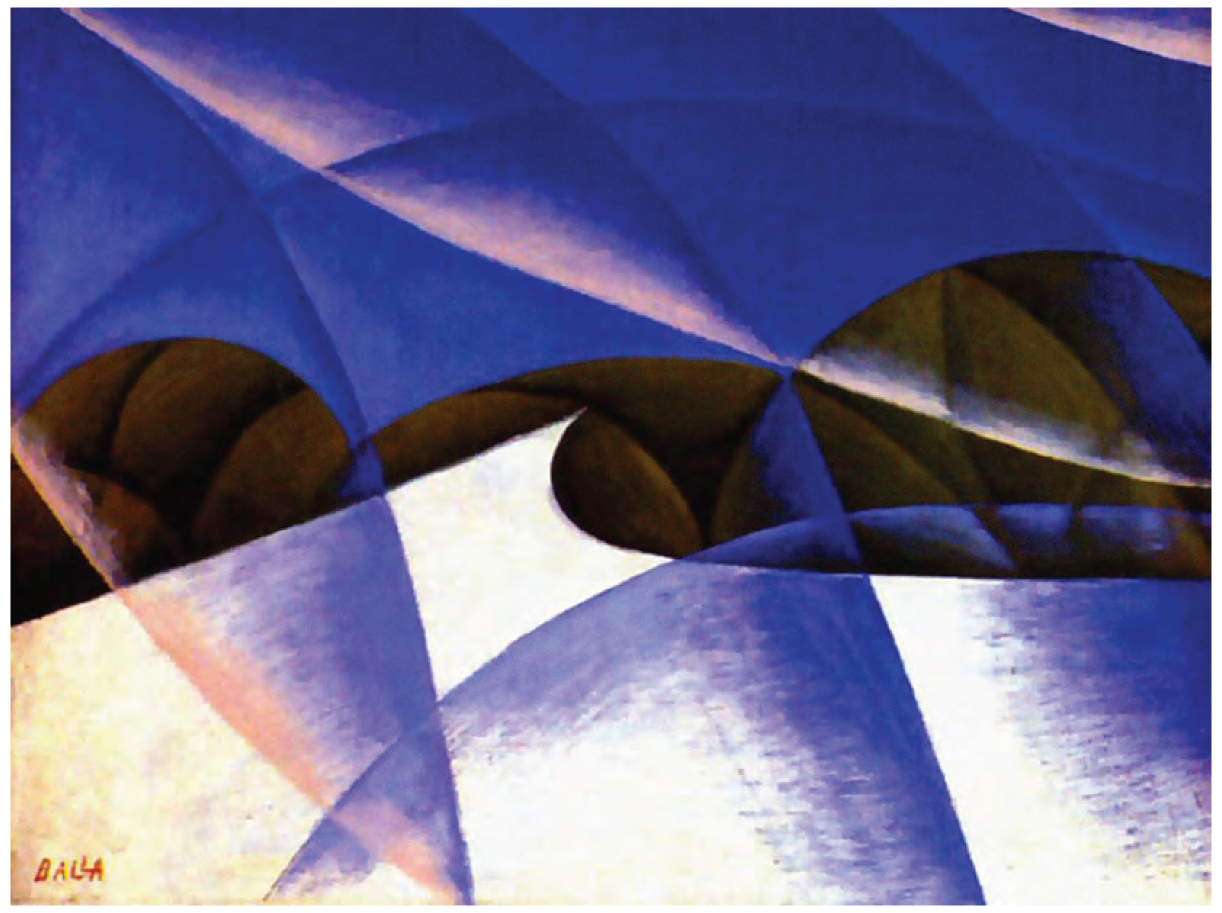
25 Les matemàtiques com a objecte artístic



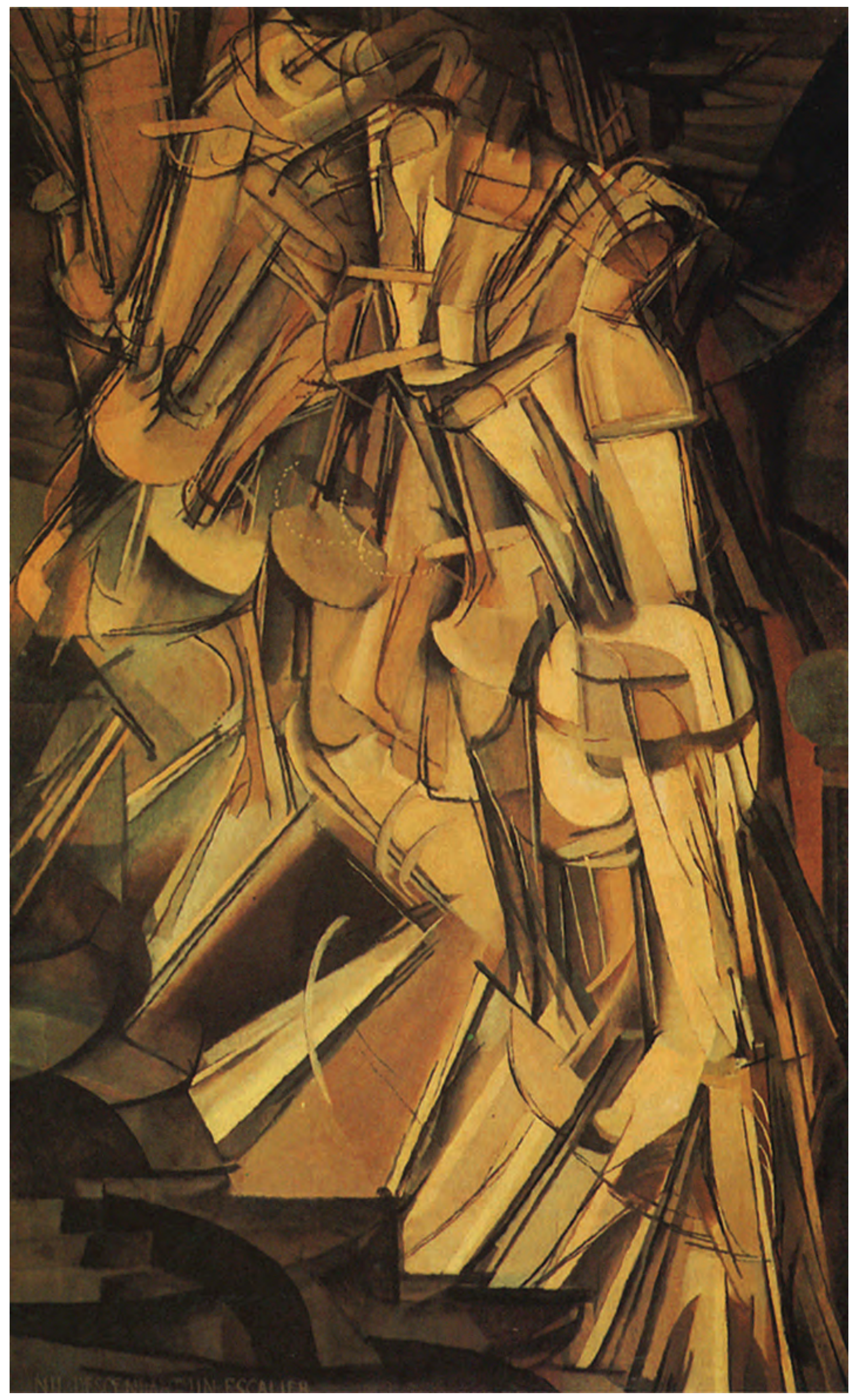
Les matemàtiques no només han influït en l'art, sinó que han estat font directa d'inspiració dels artistes. Per tancar l'exposició aquí en tens algunes mostres.

Escher ha fet magnífiques representacions d'espais creats per matemàtics, com aquest model circular de l'univers de **Poincaré**.

Diversos moviments pictòrics de començaments del segle xx, com el futurisme o el surrealisme, van utilitzar les noves geometries de la seva època. En particular la «quarta dimensió» temporal: el moviment va ser una de les seves motivacions principals.



Velocitat abstracta, de **Giacomo Balla**.



Nu baixant una escala, de **Marcel Duchamp**.

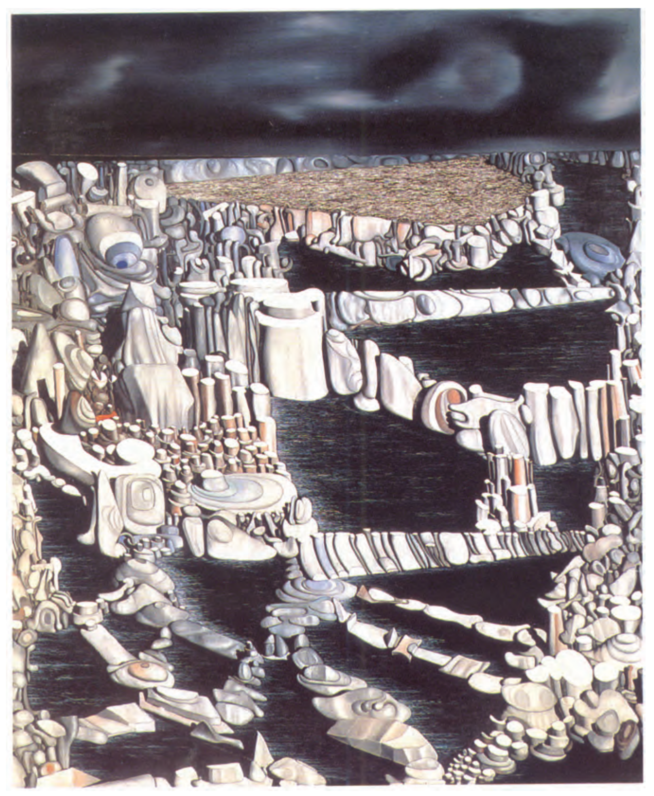
La geometria, la ciència de l'espai, les seves dimensions i les seves relacions han determinat sempre les normes i les regles de la pintura.

H. B. Chipp

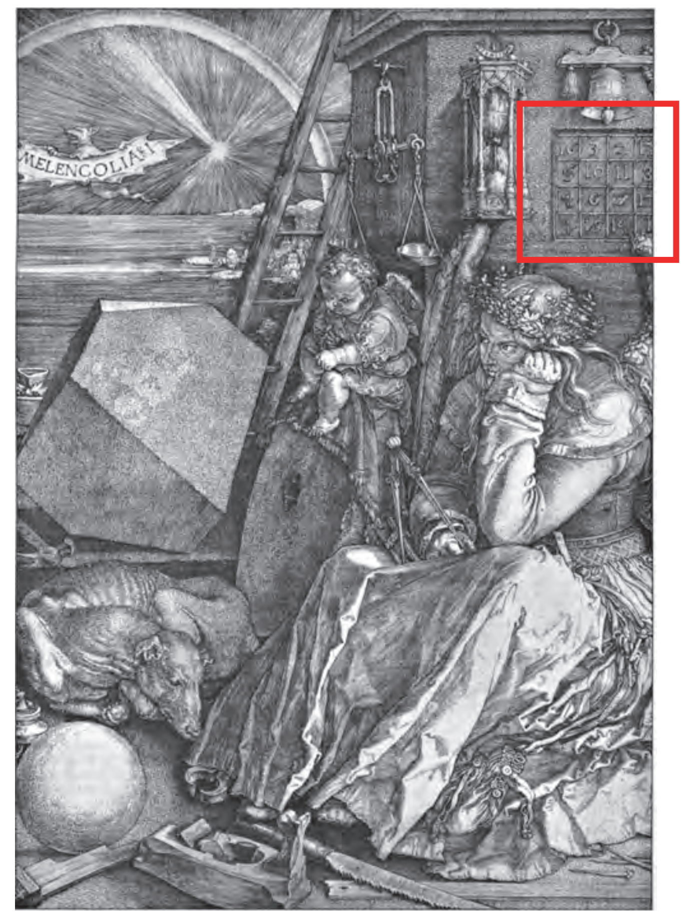
A continuació pots trobar altres exemples d'inspiració matemàtica en diverses èpoques.

Retrat de Luca Pacioli, de **Jacopo de Barbari**.

Zero, de **Jasper Johns**.



Els imaginaris, d'**Yves Tanguy**.



Malenconia, d'**Albrecht Dürer**.