

22-2-22, una data assenyalada: Curiositats al voltant dels nombres capicua

Jordi Deulofeu (UAB)



mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya

Compte enrere per

22.02.2022 a les 22:22

19:12:41 : 46

DIES HRS MINUTS SEGONS

El joc de les matemàtiques i les efemèrides

¿Dónde acaba el juego y dónde empieza la matemática seria? (...)

Para muchos, la matemática, mortalmente aburrida, no tiene nada que ver con el juego.

En cambio, para la mayoría de los matemáticos, nunca deja de ser un juego, aunque, además, pueda ser muchas otras cosas.

M. de Guzmán (1988)



Les efemèrides, i en particular les dates curioses, permeten particularitzar una classe de matemàtiques i fer-la diferent de totes les altres.

Anton Aubanell

Els antecedents: 20 de febrer de 2002

- El 20 de febrer de 2002, a les 20:02 en el marc de la 1a Fira de la Matemàtica de les escoles públiques de Sarrià-Sant Gervasi, vaig fer una xerrada sobre dates curioses i nombres capicua.

- La situació proposada llavors va ser:

Quan s'ha donat (o es donarà) una data com aquesta (capicua de 12 xifres format per la repetició d'un capicua de 4 xifres):

20 : 02 – 20 – 02 - 2002



Ha passat (o passarà) moltes vegades?

Tan poques com aquestes:

10 : 01 – 10 – 01 – 1001

11 : 11 – 11 – 11 – 1111

20 : 02 – 20 – 02 – 2002

21 : 12 – 21 – 12 – 2112

L'interès d'una curiositat (numèrica) es deu a la seva raresa (poca freqüència)

L'excusa per a la xerrada d'avui (el dia dels dosos)

La data d'avui es pot escriure així: 22 – 2 – 22 (5 xifres, 5 dosos)

i també així: 22 – 02 – 2022 (8 xifres, 6 dosos)

A les 10 del vespre, 2 minuts i 22 segons serà: 22 – 2 – 22 – 22 – 2 - 22 (10 xifres, 10 dosos) o també així: 22 – 02 – 22 – 22 - 2- 2022 (13 xifres, 11 dosos).

Alguns prefereixen 20' més tard: 22-22-22-22-2-22 (11 xifres, 11 dosos)

Una data que no ha passat desapercibuda:

<http://22-2-22.com>

Sempre n'hi ha de millors: 11h11'11"-11-11-1111 (amb 14 uns), o bé:

22h 22' 22" 22-2-2222 (amb 13 dosos, perquè el mes 22 no existeix!)

L'anunci de la xerrada té una simetria més

Una data assenyalada

Curiositats al voltant dels nombres capicua

Amb el suport de:
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA


Museu
de Matemàtiques
de Catalunya
www.mmaca.cat
@mmaca_cat

Conferència
a càrrec de Jordi Deulofeu Piquet
Dimarts 22 de febrer de 2022 a les 18:00
Sala d'actes de la Facultat de Matemàtiques i Estadística - UPC
C/ Pau Gargallo 14 - Barcelona

22-2-22

22-2-22

Conferència
a càrrec de Jordi Deulofeu Piquet

Dimarts 22 de febrer de 2022 a les 18:00

Sala d'actes de la Facultat de Matemàtiques i Estadística - UPC
C/ Pau Gargallo 14 - Barcelona


Museu
de Matemàtiques
de Catalunya
www.mmaca.cat
@mmaca_cat

Amb el suport de:
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Una data assenyalada
Curiositats al voltant dels nombres capicua

El número 2, té algunes particularitats

La majoria dels nombres tenen un sol nom (en una llengua). En el cas del dos, trobem noms associats: parell, dual, dicotòmic, doble-meitat, paritat, bilateral

- El 2 és el primer nombre parell i el primer nombre primer i l'únic nombre que és parell i primer
- Dividir un conjunt en dues parts (parells-senars, positius-negatius, caselles blanques i negres, ...) és una gran eina per resoldre problemes
- $2+2 = 2 \cdot 2$, és la solució entera (única, llevat del zero) de l'equació $a + b = a \cdot b$
- La conjectura de Goldbach diu que tot nombre parell (>2) és la suma de dos primers.
- El darrer teorema de Fermat diu que l'equació $x^n + y^n = z^n$, només té solucions enteres per $n = 2$ (ternes pitagòriques)
- La fórmula d'Euler, relaciona cares, vèrtex i arestes d'un políedre: $C + V = A + 2$
- Les potències de 2 son més presents que les altres potències. Tanmateix son les úniques que no es poden expressar com a suma de dos o més enters positius consecutius.

Representacions d'un nombre (exemple: 2022)

1. D'acord amb un sistema de numeració: el nombre 2022 escrit en base deu, correspon al: 11111100110 en base dos o 3746 en base vuit.

2. Fixada la base, d'acord amb unes xifres (i operacions) determinades.

La recreació original és la coneguda com “els quatre quatres”. Podem canviar-la i fer: amb les xifres 2, 0, 2, 2 i operacions elementals, obtenir els successius naturals. Fins on podrem arribar?

$$2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 2 = 0; \quad 2 \cdot 0 + 2 : 2 = 1; \quad 2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 = 2; \quad 2 + 0 + 2 : 2 = 3;$$

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4; \quad 20 : (2 + 2) = 5; \quad 2 + 0 + 2 + 2 = 6; \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0! = 7;$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 = 8; \quad (20 - 2) : 2 = 9; \quad 22 : 2 - 0! = 10; \quad 22 : 2 + 0 = 11;$$

Representacions d'un nombre (exemple: 2022) (II)

3. Amb totes les xifres ordenades (creixent i decreixent) i certes operacions):

**Crazy Sequential Representation: Numbers from 0 to 11111
in terms of Increasing and Decreasing Orders of 1 to 9**

Inder J. Taneja¹

S'han trobat totes les representacions excepte una: **ordre creixent de 10958**.

Si, en canvi, l'ordre decreixent: $10958 = (9 + 8 \times 7 \times 65 + 4) \times 3 - 2 + 1.$

L'any actual és: $2022 = 12^3 + 45 \times 6 + 7 + 8 + 9.$

$$2022 = 9 \times 8 \times (7 + 6) + 543 \times 2 \times 1.$$

Alguna cosa més sobre el 2022

No és un nombre gaire excepcional:

$$2022 = 2 \cdot 1011 = 2 \cdot 3 \cdot 337 \text{ (esfènic)}$$

Te 8 divisors (1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011 i 2022) i és un nombre abundant, la suma dels seus divisors propis és: 2034.

Es pot posar com a suma d'alguns dels seus divisors:

$$337 + 674 + 1011$$

Una propietat bonica:

$$2022^2 = 4088484$$

$$2202^2 = 4848804$$

Nombres formats per una sola xifra

Si ens fixem amb els nombres formats per uns trobem coses interessants:

Fixem-nos en la successió: 1, 11, 111, 1111, 11111,....

Albert Beiler va anomenar aquests nombres *Repunit*, amb la notació R_n , on n és el nombre d'uns.

Tos els termes parells son divisibles per 11. Els termes múltiples de tres, son múltiples de tres...

Hi haurà nombres primers, més enllà de l'11? Quants? Potser una infinitud?

El segon *Repunit* primer és R_{19} ; els següents son R_{23} i R_{317} . Seguir la successió dels *repunits* primers és certament difícil.

Aquest nombres tenen relació amb les potències de 10, ja que $R_n = (10^n - 1)/9$.

El procés (i la dificultat) és similar a trobar primers de Mersenne, que son de la forma $2^n - 1$.

Capicues “quadrant” *Repunits*

Els nombres formats per uns tenen propietats boniques com, per exemple, els capicues que generen els seus quadrats:

També de la relació amb els períodes dels seus inversos, trobem, per exemple:

$$142857 \cdot 7 = 999999 = 9 \cdot 111111 = 9 \cdot R_6$$

Hi ha moltes altres curiositats sobre el *Repunits*: cap és quadrat, no és coneix cap cub i encara no sabem si n'hi ha infinits que siguin primers.

I els formats per dosos?

22222222222222 (14 dosos) és Kaprekar

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

$$111111^2 = 12345654321$$

$$1111111^2 = 1234567654321$$

$$11111111^2 = 123456787654321$$

$$111111111^2 = 12345678987654321$$

Dates capicues

Hi ha moltes dates capicues?

Tot depèn de com s'escriguin i de l'any en què ens trobem!

En els darrers anys del s. XX era difícil trobar-ne:

Per exemple, el 1998: 8-9-98 (única) i cap si volem escriure l'any complet.

En canvi, en alguns dels primers anys del s. XXI, és més senzill. Fixem-nos en el 2022: Si escrivim l'any amb dues xifres "22", resulta que el dia 22 de cada més (excepte octubre i desembre) serà capicua: 22-1-22, 22-2-22, 22-3-22, etc...

Si volem escriure l'any complet, 2022, és més difícil: 22-02-2022 (només avui)!

Parlem de capicues (quants n'hi ha?)

Una primera qüestió: Quants capicues hi ha?

El meu oncle feia col·lecció de bitllets de tramvia capicues. Si el nombre del bitllet era de 5 xifres, quants capicues hi havia? Quina és la probabilitat que et toqui un capicua?



Dels 100000 nombres, 1000 son capicues, és a dir un 1%.
Esperem trobar un capicua cada 100 viatges.

La probabilitat d'obtenir un capicua

Quan probable és que si trio un nombre a l'atzar, el nombre sigui capicua?

A mesura que augmenta el nombre de xifres disminueix la probabilitat.
Com?

1 xifra: probabilitat 1

2 xifres: probabilitat 0,1

3 xifres: probabilitat: 0,1

4 xifres: probabilitat: 0,01

5 xifres: probabilitat: 0,01

El patró sembla clar: Si n és el nombre de xifres, la probabilitat de que un nombre de n xifres sigui capicua és:

$$1 / 10^{(|n|-2)}$$

El 1001 un capicua interessant

Preneu un nombre de 3 xifres i repetiu-les per formar un nombre de 6 xifres (de la forma *abcabc*)

Dividiu el nombre per 7, el resultat per 11 i el resultat per 13. Què obteniu?

Exemple: Triem el 965965,

El dividim per 7 i obtenim 137995;

Dividim 137995 per 11 i obtenim 12545,

i dividim 12545 per 13, obtenim, 965.

Passarà sempre el mateix? Per què?

Si ho mirem al revés sembla clar: $965 \cdot (13 \cdot 11 \cdot 7) = 965 \cdot 1001 = 965965$

Invertir l'ordre de les xifres d'un nombre

Prenem un nombre i apliquem l'operació “invertir l'ordre de les xifres”. Si el nombre és capicua, aquesta operació deixa el nombre igual.

La combinació d'aquesta operació amb altres (suma, resta, ...) genera diverses curiositats i problemes, alguns encara no resolts.

Per exemple, prenem un nombre de tres xifres. Invertim el nombre i restem els dos nombres. Tornem a invertir i sumem. Quin resultat s'obté?

$$724 - 427 = 297; \quad 297 + 792 = 1089 \quad (9 \cdot 121)$$

Per qualsevol nombre de tres xifres (la primera i la tercera diferents, altrament dona 0) sempre s'obté el 1089! Per què?

Quan restem, obtenim un nombre que és múltiple de 9. La xifra del mig és 9 i les altres dues sumen 9. Quan invertim i sumem, les unitats sumen 9, les desenes sumen 18 i les centenes 9, més 1 de les desenes, fan 10, és a dir 1089.

$$1089 = 9 \cdot 121 = 33^2 = 65^2 - 56^2; \quad 1089 \cdot 9 = 9801$$

Girem un nombre per obtenir capicues

Tornem a l'operació “invertir l'ordre de les xifres”. Considerem un nombre i el que resulta d'invertir les xifres i els sumem: obtindrem un capicua?

Si ho és, hem acabat. Si no no ho és, repetim l'operació.

Podem assegurar que sempre arribarem a un capicua?

Ex. (I): **54**, invertim, 45; sumem: $54 + 45 = 99$, capicua (1 pas)

Ex. (II): **73**, invertim, 37; sumem: 110. Repetim: $110 + 011 = 121$ (2 passos)

Ex. (III): **78**+87=165; 165+561=726; 726+627=1353; 1353+3531= 4884 (4 p.)

Una prova empírica permet assegurar que si el nombre té dues xifres sempre es pot.

El cicle més llarg amb dues xifres

El cicle més llarg, correspon als
nombre 89 i requereix 24 passos!

1. $89 + 98 = 187$
2. $187 + 781 = 968$
3. $968 + 869 = 1837$
4. $1837 + 7381 = 9218$
5. $9218 + 8129 = 17347$
6. $17347 + 74371 = 91718$
7. $91718 + 81719 = 173437$
8. $173437 + 734371 = 907808$
9. $907808 + 808709 = 1716517$
10. $1716517 + 7156171 = 8872688$
11. $8872688 + 8862788 = 17735476$
12. $17735476 + 67453771 = 85189247$
13. $85189247 + 74298158 = 159487405$
14. $159487405 + 504784951 = 664272356$
15. $664272356 + 653272466 = 1317544822$
16. $1317544822 + 2284457131 = 3602001953$
17. $3602001953 + 3591002063 = 7193004016$
18. $7193004016 + 6104003917 = 13297007933$
19. $13297007933 + 33970079231 = 47267087164$
20. $47267087164 + 46178076274 = 93445163438$
21. $93445163438 + 83436154439 = 176881317877$
22. $176881317877 + 778713188671 = 955594506548$
23. $955594506548 + 845605495559 = 1801200002107$
24. $1801200002107 + 7012000021081 = 8813200023188$

El nombre 196 és un nombre de *Lychrel*?

Què passa quan fem el mateix amb nombres de tres xifres (o més)?

Un nombre es diu que és de *Lychrel* (nom proposat per Wade Van Landingham) si quan repetim la seqüència anterior (invertir i sumar) mai obtenim un capicua. Hi ha alguns “ferms” candidats a ser nombres de Lychrel, el menor dels quals és 196.

S’han realitzat més de 700 milions d’iteracions, arribant a nombres de més de 300 milions de xifres i no s’ha arribat a un capicua!

Altres candidats amb tres xifres son:

295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978 i 986

El nombre 196 és un nombre de *Lychrel*?

El capicua més gran trobat (14-12-2021) prové del nombre:

1,000,206,827,388,999,999,095,750

després de fer 293 iteracions, i és un capicua de 132 digits:

88022661552988847333026526976864644433343388
77338834659967654248544584245676995643883377
88334333444646867962562033374888925516622088

Existeixen els nombres de *Lychrel*?

Si bé en base 10 encara no s'ha demostrat que existeixen, si s'ha aconseguit en altres bases de numeració.

En particular, el nombre 10110 de base dos (22 en decimal) és un nombre de *Lychrel*. També n'hi ha en bases que son potències de dos. Els menors candidats en cada base son els de la taula.

Successió OEIS A060382

b	Smallest possible Lychrel number in base b written in base b (base 10)
2	10110 (22)
3	10211 (103)
4	10202 (290)
5	10313 (708)
6	4555 (1079)
7	10513 (2656)
8	1775 (1021)
9	728 (593)
10	196 (196)

Una magnífica font de successions de nombres enters és la OEIS. En el cas del problema del 196, trobem:

A056964 $a(n) = n + \text{inversió de dígit de } n$.
 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 110, 1, 3, 1, 2 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143, 154, 66, 77, 88, 99, 110 ([llista](#) ; [gràfic](#) ; [refs](#) ; [escoltar](#) ; [història](#) ; [text](#) ; [format intern](#))

A023108 Nombres enters positius que aparentment mai donen lloc a un palíndrom sota aplicacions repetides de la funció [A056964](#) $(x) = x + (x \text{ amb els dígit invertits})$.
 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497, 1585, 1587, 1675,

A088753 Nombres n tals que el revés i Suma! trajectòria de n (presumiblement) no arriba a un palíndrom (amb l'excepció de n mateix) i no s'uneix a la trajectòria de cap terme $m < n$.
 196, 879, 1997, 7059, 9999, 10553, 10563, 10577, 10583, 10585, 10638, 10663, 10668, 10697, 10715, 10728, 10735, 10746, 10748, 10783, 10785, 10787, 10788, 10877, 10883, 10963, 10965, 10969, 10977, 10983, 10985, 12797, 12898, 13097, 13197, 13694, 14096, 14698, 15298, 15298 , 15297 , [152597](#) ; [format](#)

De la inversió a l'ordre: la constant de *Kaprekar*

Prenem un nombre de 4 xifres, per exemple 7371 i ordenem les xifres de gran a petita i de petita a gran. Restem els dos nombres i repetim. Què passarà?

$$7731 - 1377 = 6354$$

$$6543 - 3456 = 3087$$

$$8730 - 0378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = \mathbf{6174}$$

$$7641 - 1467 = \mathbf{6174}$$

Sempre s'arriba a 6174 amb, com a màxim 7 iteracions. El 6174, s'anomena constant de Kaprekar, en honor a l'hindú *Dattatreya Ramchandra Kaprekar* (1905-1986), mestre i matemàtic aficionat, autodidacta, autor de magnífiques recreacions matemàtiques.

A la OEIS A099009, hi ha les constants pels primers ordres:

0, 495, 6174, 549.945, 631.764, 63.317.664, 97.508.421, 554.999.445, 864.197.532, 6333176664,
9753086421, 9975084201, 86431976532, 555.499.994.445, 633.331.766.664, 975.330.866.421,

Més propietats dels nombres capicua

Tot nombre és capicua en alguna base:

Per exemple: 21 no és capicua, però en base dos si ho és: 10101

De la mateix manera que tot nombre és suma de tres triangulars o quatre quadrats, tenim que **tot nombre és la suma de tres capicues** (excepte en base dos, on per exemple 176 escrit en base dos en necessita quatre):

$$2022 = 1001 + 999 + 22 \text{ i també } 2002 + 11 + 9$$

Quin lloc ocupa un capicua en la successió de tots els capicua?

Si el nombre de xifres és parell: preneu la meitat de les xifres i afegiu 1 davant: 347743 ocupa el lloc: 1347

Si el nombre de xifres és senar: suma 1 a la 1a xifra i al darrere poseu la resta de xifres fins a la meitat (inclòs el central): 3471743, ocupa el lloc 4471.

Quadrats màgics amb nombres capicua (I)

La regularitat en la distància entre els nombres capicua fa que resulti senzill construir quadrats màgics amb ells. A partir del quadrat màgic 3x3 de suma 15, construïm un quadrat màgic amb tots els capicua de dues xifres, de suma 165.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

22	99	44
77	55	33
66	11	88

Quadrats màgics amb nombres capicua (II)

Els quadrats màgics de 4x4 son una mica més difícils de construir. Aquest és un exemple format per nombres capicua consecutius de quatre xifres, des de 1221 fins a 2772. Està fet de manera que els dos nombres centrals 1991 i 2002 (els dos darrers anys capicua) es situïn en els extrems (inici i final).

1991	2112	2222	1661
2442	1441	1331	2772
1221	2662	2552	1551
2332	1771	1881	2002

La suma és 7986 i val no només per les files, columnes i diagonals, si no també per molts altres grups de quatre nombres: per exemple els 4 vèrtex, els 4 nombres centrals, els dos centrals de dalt i de baix, etc.

Quadrats màgics amb nombres capicua (III)

424	777	353	888	878	323	787	454
393	848	464	737	747	494	838	363
868	333	797	444	434	767	343	898
757	484	828	373	383	858	474	727
525	999	232	686	979	545	666	252
292	626	585	939	646	272	959	565
989	535	696	222	555	969	242	676
636	282	929	595	262	656	575	949

Quadrat màgic d'ordre 8, suma 4884, construït ajuntant quatre quadrats màgics d'ordre 4, suma 2442 (Allen Johnson, JRM 21:2, p. 155-156)

Per anar acabant: capicues i triangle de Pascal

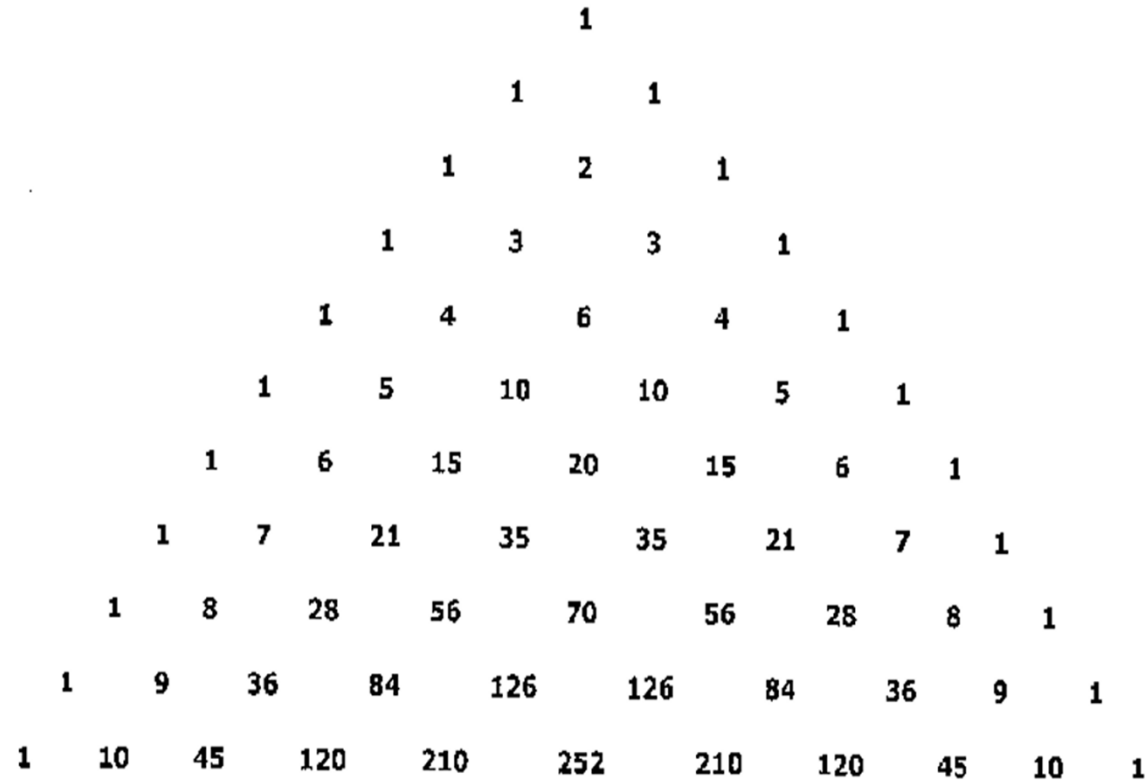
Hi ha 15 triangulars capicues ($<10^6$):

1, 3, 6, 55, 66, 171, 595, 666, 3003, 5995,
8778, 15051, 66066, 617716, 828828.

666 ----- D C L X V I

539593131395935 (15 xifres senars)

8208268228628028 (16 xifres parells)



Per anar acabant: encara més capicues

9 nombres de 9 xifres: capicues i primers

188888881	111181111	323232323
199999991	111191111	727272727
355555553	777767777	919191919

Un magnífic patró de capicues que son potències de capicues:

Nombre (n)	n^2	n^3	n^4
11	121	1331	14641
101	10201	1030301	104060401
1001	1002001	1003003001	1004006004001
10001	100020001	1000300030001	10004000600040001

PALINDROM: <http://recmath.org/Magic%20Squares/palindromes.htm#magic%20squares>

I les efemèrides?

22-2-1632. Galileu publica el *Diàleg sobre els dos màxims sistemes del mon*

22-2-1857. Neix Heirich Hertz, primera persona que va produir i detectar ones de radio

22-2-1903. Neix el matemàtic i filòsof anglès, Frank P. Ramsey

22-2-1997. L'institut Roslin d'Edimburg anuncia l'èxit de la clonació de l'ovella Dolly

22-2-2017. Es descobreixen 7 exoplanetes alguns similars a la Terra

Fins el 21-12-2112!!!