

Vuit seccions del cub

Un material per treballar en 2'5 dimensions



Vuit seccions del cub és un material educatiu del **MMACA**
basat en una idea original de **Josep Rey Nadal**

mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya

Llicència: CC-BY-NC-SA

Versió: 2025-06-17

Introducció

Quan els docents introduïm **la geometria en 3 dimensions a Secundària**, sovint ens limitem a parlar de volums i àrees laterals de poliedres i figures de revolució i deixem arraconats altres temes tant o més útils, però molt més difícils de visualitzar i dur a l'aula, com ara els angles dièdrics o la intersecció d'objectes a l'espai.

Amb el material que proposem a continuació, **volem facilitar la introducció a la geometria tridimensional a través d'objectes bidimensionals situats en l'espai en una configuració que resulta fàcil d'entendre**. Es tracta, doncs, d'un material a mig camí entre la geometria 2D i la geometria 3D... podríem dir que és un material per a treballar la geometria 2'5D.

El material en si mateix és, simplement, **una caixa transparent cúbica de 10 cm d'aresta**, acompanyada de **vuit de seccions planes d'aquest cub** retallades en cartolines de color. Les diferents seccions encaixen fàcilment entre elles per formar una estructura estable, però són més fàcils de manipular si, en acabar d'encaixar-les, les introduïm a la caixa.

El resultat és un objecte format per dues famílies de plans paral·lels intersecats amb un cub, incloent-hi **triangles equilàters, un hexàgon regular i rectangles de proporcions $1:\sqrt{2}$** . Aquestes seccions defugen el previsible quadrat i ens fan mirar amb altres ulls un objecte tan aparentment senzill i avorrit com és el cub. A la vegada, són figures prou simples d'analitzar i això ens permet arribar més lluny amb menys maquinària matemàtica.

A continuació us proposem un seguit de **preguntes i activitats** que es poden dur a terme amb alumnat de diversos cursos, des **de 1r d'ESO a 2n de Batxillerat**. Són només una mostra del potencial d'aquest material i no pretenen recollir de manera exhaustiva totes les possibilitats que ofereix. Esperem que siguin inspiradores i que els docents se les facin seves i en trobin de noves!

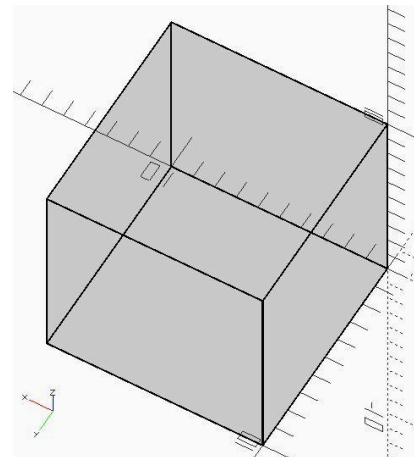
Activitats proposades

(són només una mostra, no cal fer-les totes!)

Compta quantes cares, arestes i vèrtexs té un cub

(i comprova que es verifica la fórmula d'Euler: $C - A + V = 2$)

- Cares: 6
- Arestes: 12
- Vèrtexs: 8
- $C - A + V = 2$: $6 - 12 + 8 = 2$



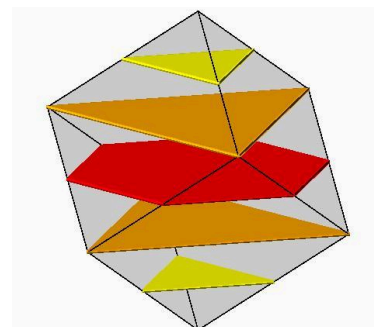
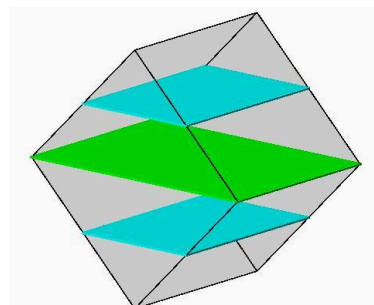
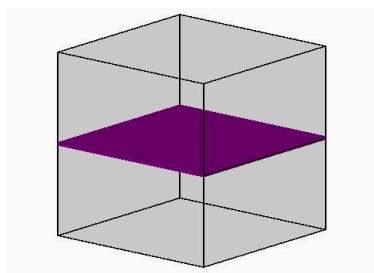
Calcula l'àrea i el volum d'aquest cub

(mesurant una de les seves arestes)

- Aresta: 10 cm
- Àrea: $6 \times 10 \times 10 = 600 \text{ cm}^2$
- Volum: $10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \text{ cm}^3 (= 1 \text{ litre!})$

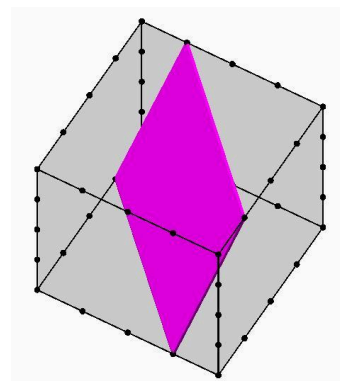
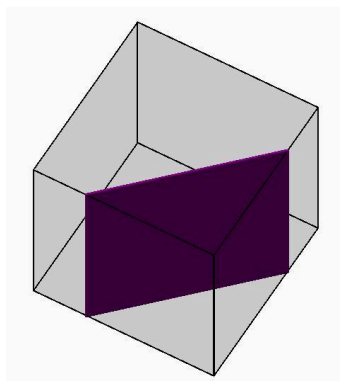
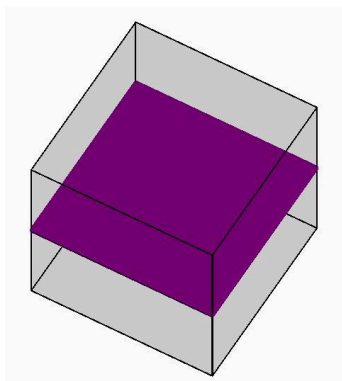
Si tallem un cub amb un pla... quins polígons podem obtenir?

(situa el cub sobre una cara, una aresta o un vèrtex i talla-ho amb plans horitzontals)



Quants quadrats pots trobar inscrits en un cub?

(comprova que per un d'ells hi podries fer passar el cub sencer!)

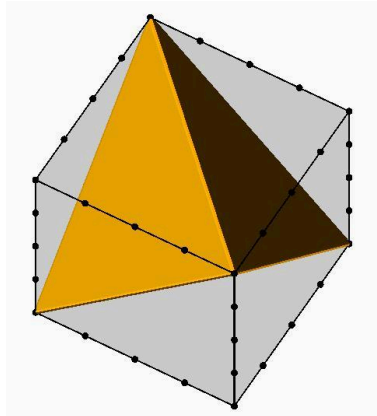


Aquest fa 10 cm d'aresta

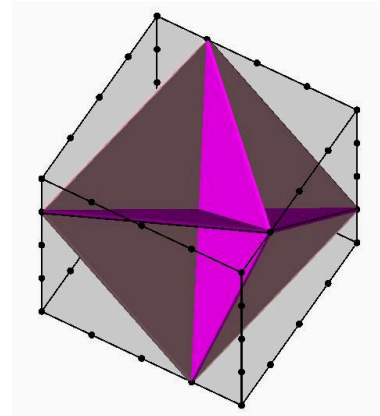
Un altre de 10 cm d'aresta

Aquest fa $7\sqrt{2}$ cm d'aresta

Troba el tetraedre i l'octaedre més grans que caben dins el cub
(i calcula la longitud de les seves arestes)

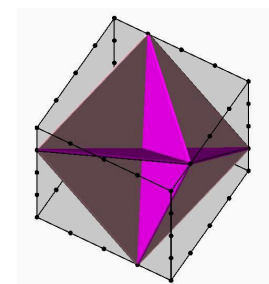
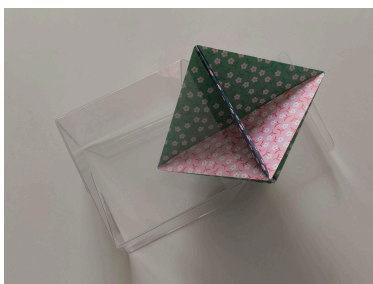


El tetraedre més gran té arestes de mida $10\sqrt{2}$ cm



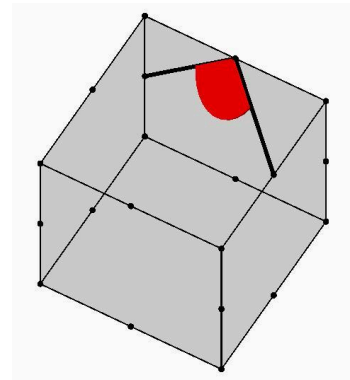
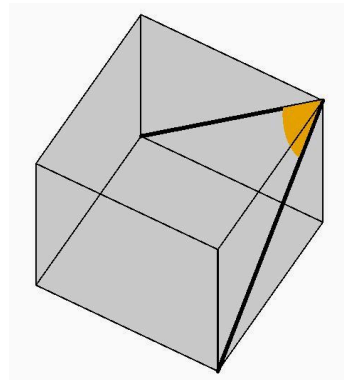
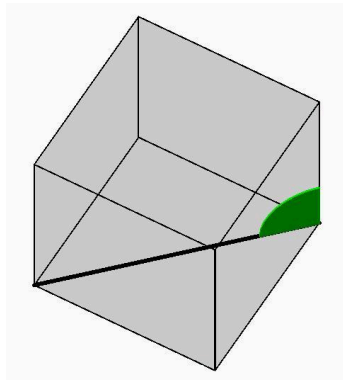
Octaedre més gran es basa en tres quadrats de $7'5\sqrt{2}$ cm d'aresta

Fabrica l'esquelet d'octaedre de Robert Neale amb origami
(fes servir 6 quadrats de 15 cm d'aresta i la figura resultant encaixarà perfectament al cub!)

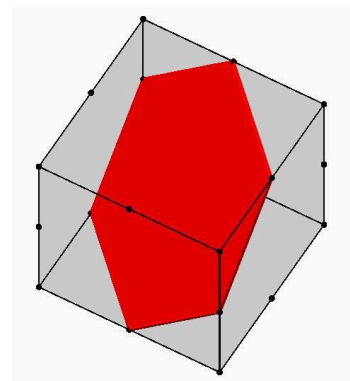
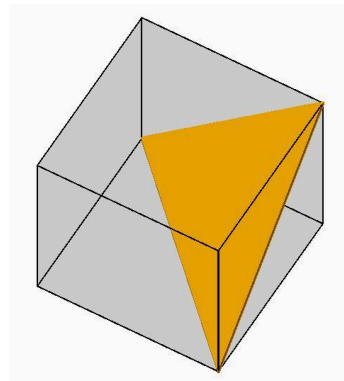
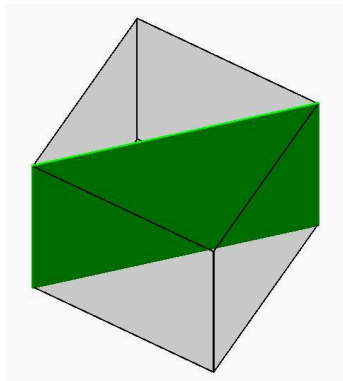


Calcula quant mesuren aquests angles

(potser t'ajuda afegir més línies fins a formar una figura reconeixible)



- **Angle verd:** *90° perquè podem formar un rectangle*
- **Angle taronja:** *60° perquè podem formar un triangle equilàter*
- **Angle vermell:** *120° perquè podem formar un hexàgon regular*



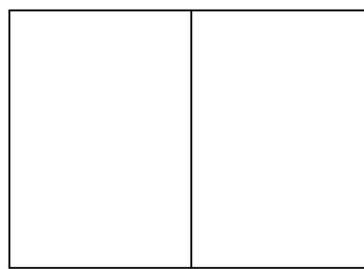
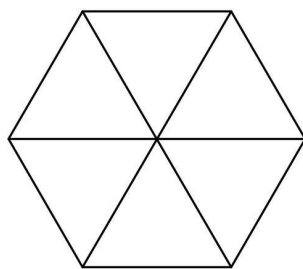
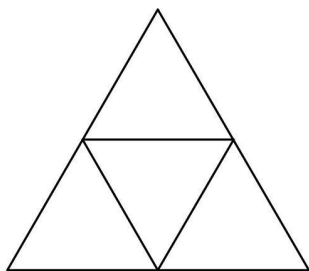
Pots encaixar totes aquestes peces dins del cub?

(pensa bé en quin ordre encaixaràs les peces!)



Explica la relació que hi ha entre aquestes àrees

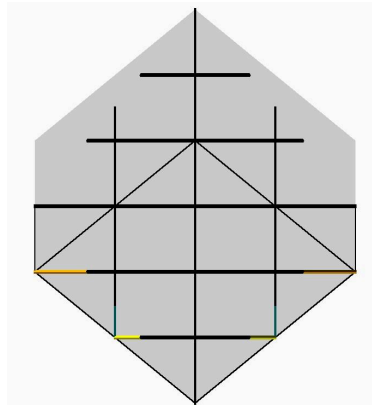
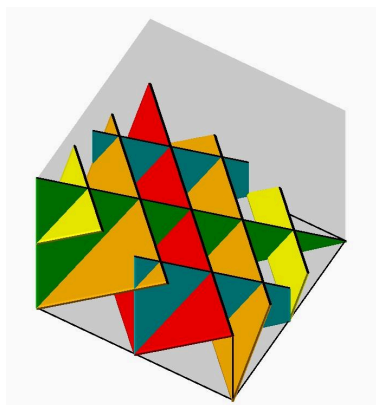
(raonant sense fer servir cap fórmula ni els valors concrets de les àrees)



- **Per què el triangle taronja té 4 vegades més àrea que el triangle groc?**
Perquè la raó de semblança entre el triangle groc i el triangle taronja és d'1:2, cosa que fa possible formar el triangle taronja amb 4 còpies del triangle groc.
- **Per què l'hexàgon vermell té 6 vegades més àrea que el triangle groc?**
Perquè un hexàgon regular es pot formar amb 6 triangles equilàters que tinguin la mateixa aresta, com és el cas.
- **Per què el rectangle verd té 2 vegades més àrea que el rectangle blau?**
Perquè la raó de semblança entre el rectangle blau i el rectangle verd és d'1:√2, com en els fulls A5 i A4 (o A4 i A3) que tot sovint fem servir a l'aula i, per tant, si tallem el rectangle verd per la meitat, obtenim dos rectangles com el blau.

Quina relació d'aspecte tenen aquests rectangles negres?

(raona-ho a partir de com divideixen les diferents diagonals en parts iguals)



Les línies horitzontals mesuren una $\frac{1}{4}$ de la diagonal d'una cara mentre que les línies verticals són $\frac{1}{6}$ de la diagonal del cub.

Horitzontals:

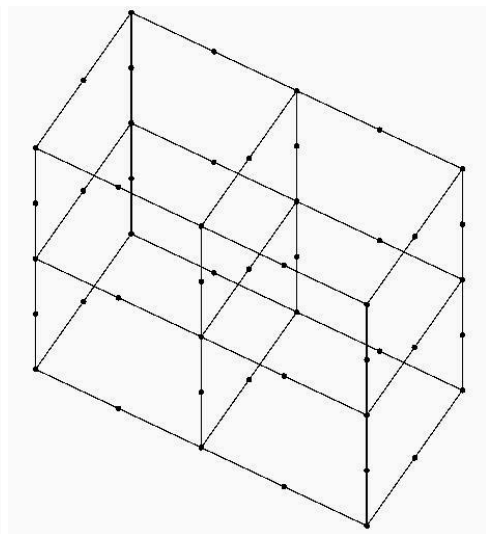
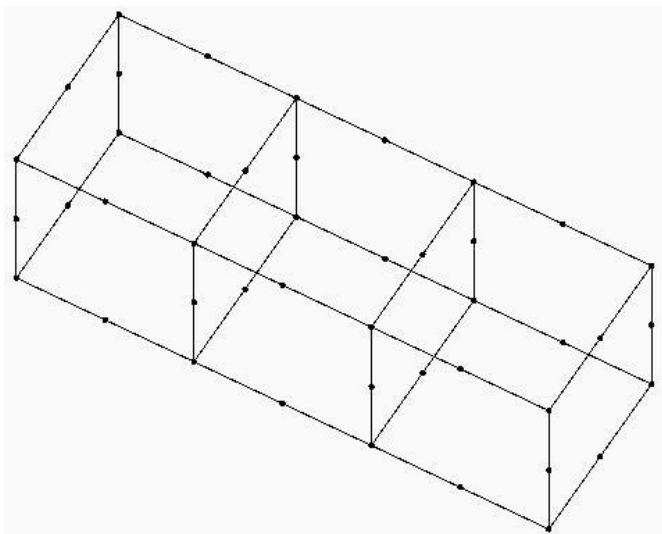
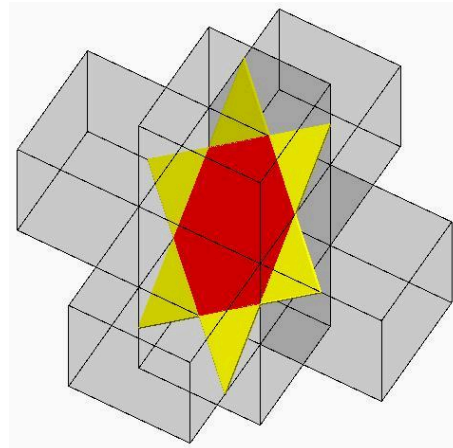
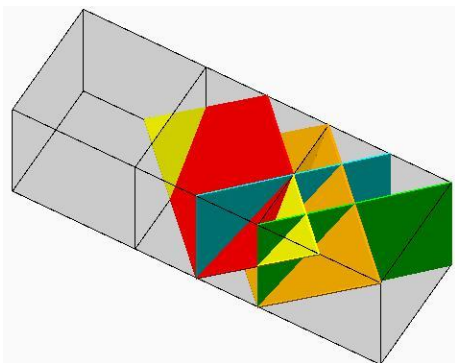
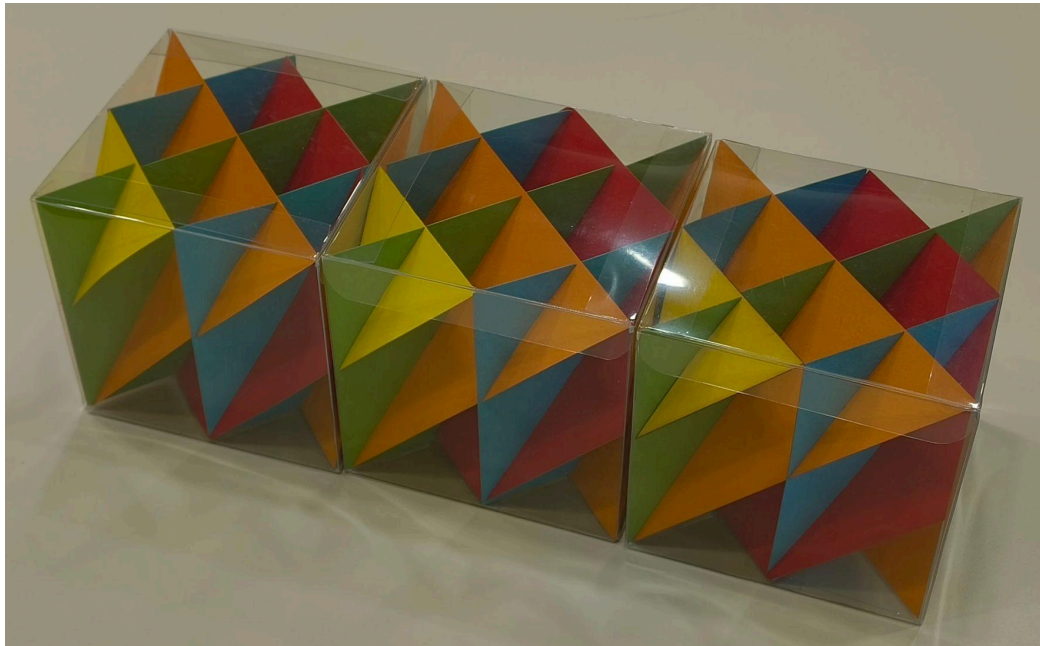
$$10 \times \sqrt{2} / 4 \text{ cm} = 5 / \sqrt{2} \text{ cm}$$

Verticals:

$$10 \times \sqrt{3} / 6 \text{ cm} = 5 / \sqrt{3} \text{ cm}$$

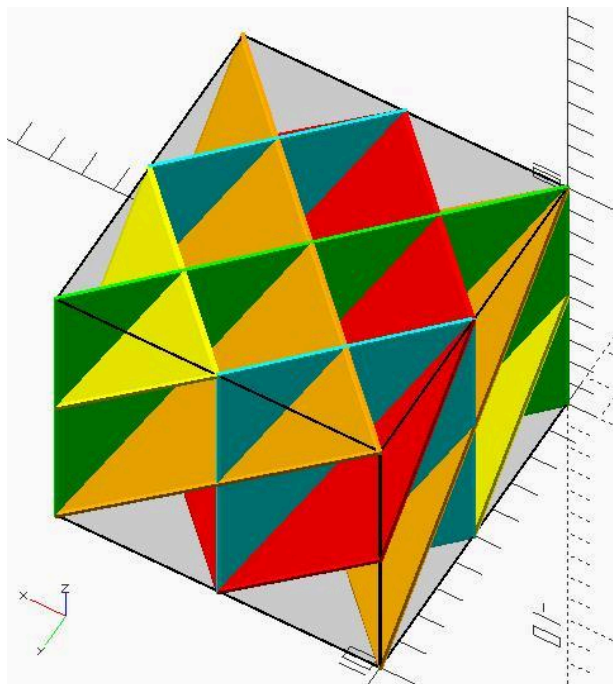
Quins patrons identificats quan apiles més d'un cub?

(descobreix-ne de nous fixant-te només en alguns dels plans)

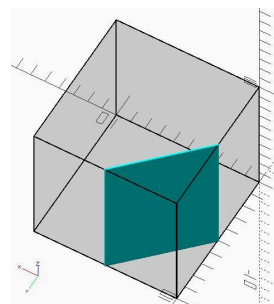
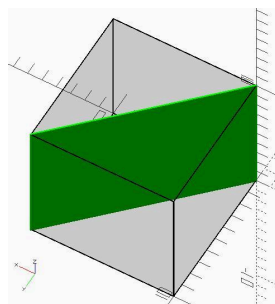
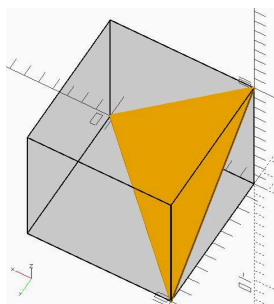
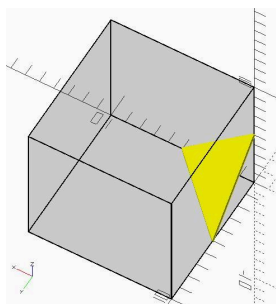
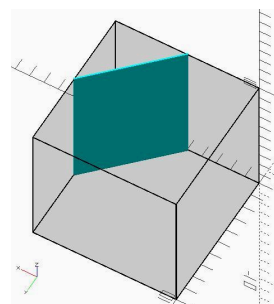
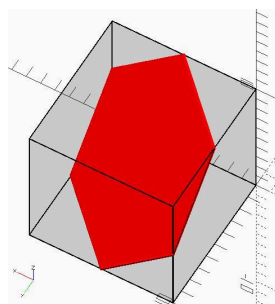
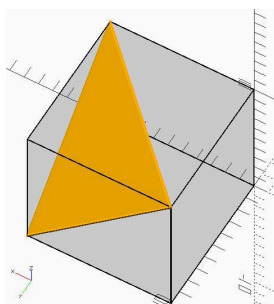
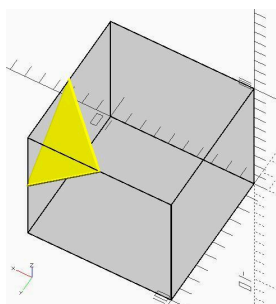


Calcula les coordenades dels vèrtexs de cada polígon

(fent servir una cantonada del cub de 10 cm d'aresta com a origen de coordenades)



- Triangle groc: $(0,0,5)$, $(0,5,0)$ i $(5,0,0)$
- Triangle taronja: $(0,0,10)$, $(0,10,0)$ i $(10,0,0)$
- Hexàgon vermell: $(0,5,10)$, $(5,10,0)$, $(10,0,5)$, $(5,0,10)$, $(0,10,5)$ i $(10,5,0)$
- Triangle taronja: $(0,10,10)$, $(10,10,0)$ i $(10,0,10)$
- Triangle groc: $(10,10,5)$, $(10,5,10)$ i $(5,10,10)$
- Rectangle blau: $(5,0,0)$, $(10,5,0)$, $(5,0,10)$ i $(10,5,10)$
- Rectangle verd: $(0,0,0)$, $(10,10,0)$, $(0,0,10)$ i $(10,10,10)$
- Rectangle blau: $(0,5,0)$, $(5,10,0)$, $(0,5,10)$ i $(5,10,10)$



Calcula la longitud de les arestes de cada polígon

(a partir de les coordenades dels seus vèrtexs i el teorema de Pitàgores)

- **Triangles regulars grocs:** $5\sqrt{2}\text{ cm}$
- **Triangles regulars taronges:** $10\sqrt{2}\text{ cm}$
- **Hexàgon regular vermell:** $5\sqrt{2}\text{ cm}$
- **Rectangles blaus:** $5\sqrt{2}\text{ cm i } 10\text{ cm}$
- **Rectangle verd:** $10\sqrt{2}\text{ cm i } 10\text{ cm}$

Calcula l'àrea de cada polígon

(a partir de la longitud de les arestes)

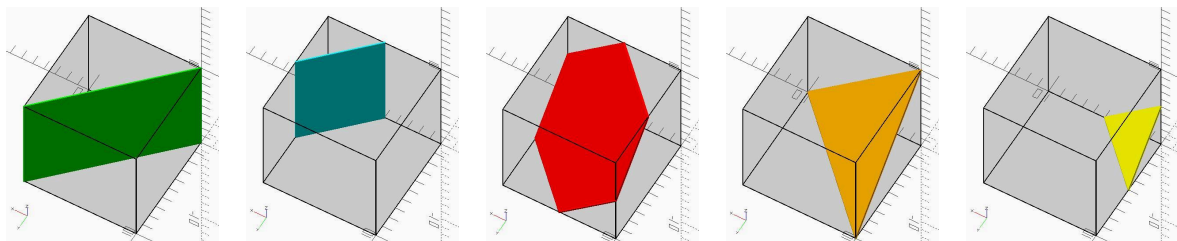
- **Triangles grocs:** $12'5\sqrt{3}\text{ cm}^2$
- **Triangles taronges:** $50\sqrt{3}\text{ cm}^2$
- **Hexàgon vermell:** $75\sqrt{3}\text{ cm}^2$
- **Rectangles blaus:** $50\sqrt{2}\text{ cm}^2$
- **Rectangle verd:** $100\sqrt{2}\text{ cm}^2$

Dibuixa i retalla les 8 seccions fent servir estris de dibuix tècnic

(fes la teva versió a partir de la informació que has pogut mesurar i deduir fins ara!)

Quina fracció del volum del cub queda...

(calcula-ho sense calcular explícitament el volum de cada secció!)



- **... darrere del rectangle verd:** $\frac{1}{2}$
(perquè el rectangle verd talla el cub en 2 parts iguals)
- **... darrere del rectangle blau:** $\frac{1}{8}$
(perquè és la meitat d'ample i la meitat de profund que l'anterior, però igual d'alt)
- **... a sota l'hexàgon vermell:** $\frac{1}{2}$
(perquè l'hexàgon vermell talla el cub en dues parts iguals)
- **... a sota el triangle taronja:** $\frac{1}{6}$
(perquè el volum d'una piràmide és $\frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{altura}$ i, en aquest cas això serà:
 $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 10 \times 10) \times 10 = \frac{1}{6} \times (10 \times 10 \times 10) = \frac{1}{6}$ volum del cub)
- **... a sota el triangle groc:** $\frac{1}{48}$
(perquè és la meitat d'ample, la meitat de profund i la meitat d'alt que l'anterior)

Calcula l'equació dels plans corresponents a cada polígon

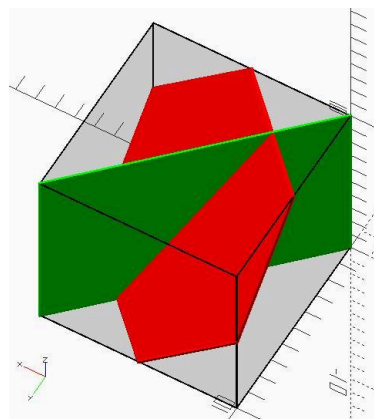
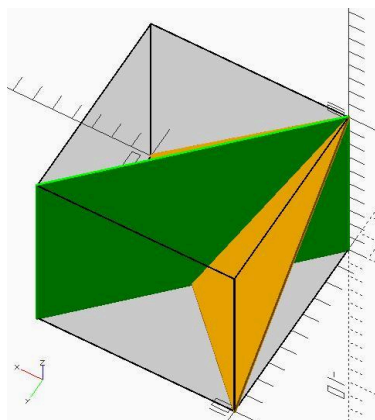
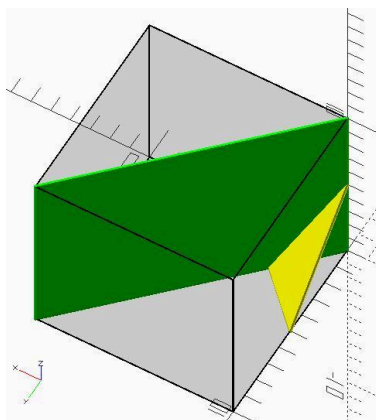
(a partir de les coordenades dels seus vèrtexs)

- Triangle groc: $X + Y + Z = 5$
- Triangle taronja: $X + Y + Z = 10$
- Hexàgon vermell: $X + Y + Z = 15$
- Triangle taronja: $X + Y + Z = 20$
- Triangle groc: $X + Y + Z = 25$
- Rectangle blau: $X - Y = 5$
- Rectangle verd: $X - Y = 0$
- Rectangle blau: $X - Y = -5$
- Cares del cub: $X = 0, X = 10, Y = 0, Y = 10, Z = 0 \text{ i } Z = 10.$

Estudia aquests segments

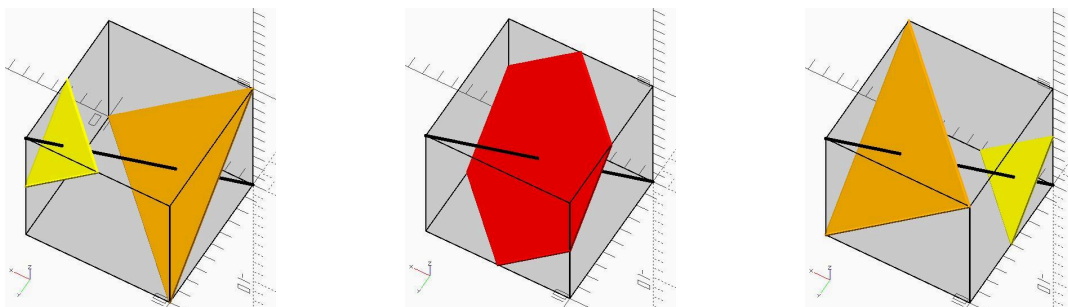
(trobant primer les coordenades dels seus extrems)

- La intersecció entre el rectangle verd i un triangle groc
Extrems: $(2'5, 2'5, 0) \text{ i } (0, 0, 5)$
Longitud: $5\sqrt{3}/\sqrt{2} \text{ cm}$
Equació: $2X = 2Y = 5 - Z$
- La intersecció entre el rectangle verd i un triangle taronja:
Extrems: $(5, 5, 0) \text{ i } (0, 0, 10)$
Longitud: $10\sqrt{3}/\sqrt{2} \text{ cm}$
Equació: $2X = 2Y = 10 - Z$
- La intersecció entre el rectangle verd i l'hexàgon vermell:
Extrems: $(7'5, 7'5, 0) \text{ i } (2'5, 2'5, 10)$
Longitud: $10\sqrt{3}/\sqrt{2} \text{ cm}$
Equació: $2X = 2Y = 15 - Z$



Per què la diagonal és perpendicular als triangles i l'hexàgon?

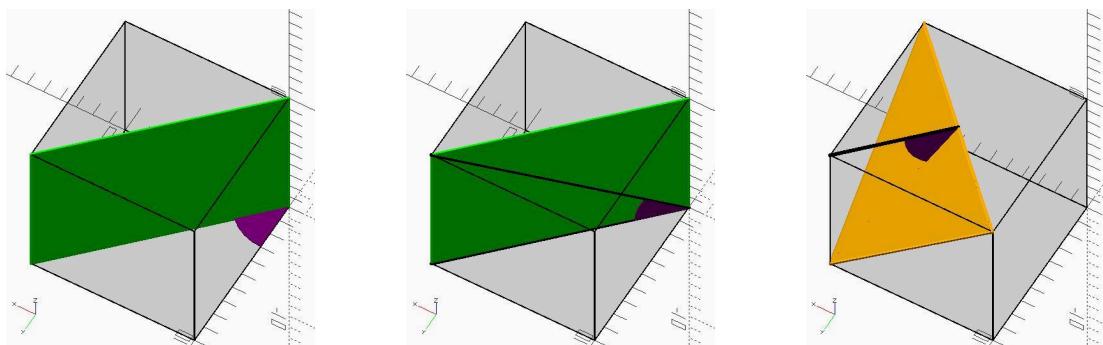
(raona-ho a partir de les corresponents equacions dels plans i la recta)



El vector normal als 5 plans corresponents als triangles i l'hexàgon és $(1, 1, 1)$ que és, precisament, un vector director de la recta corresponent a la diagonal del rectangle verd, que té per equació $X = Y = Z$.

Calcula quant mesuren aquests angles

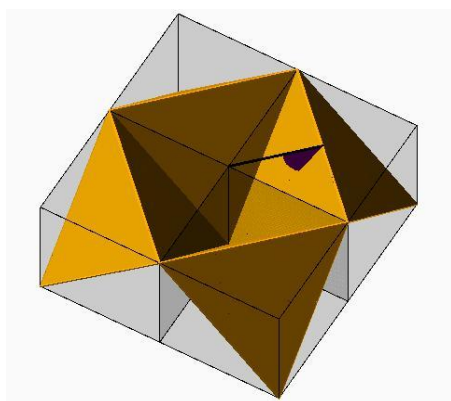
(fent servir raons trigonomètriques inverses)



- Entre el rectangle verd i el pla YZ: $\arctan(1 / 1) = 45^\circ$
- Entre la diagonal del rectangle verd i el pla XY: $\arctan(1 / \sqrt{2})$
- Entre el triangle taronja i el pla XY: $\arctan(\sqrt{2} / 1)$

Dedueix l'angle dièdric i el volum del tetraedre i l'octaedre

(a partir de l'angle $\alpha = \arctan(\sqrt{2} / 1)$ i el volum sota el triangle taronja = $\frac{1}{6}$ volum del cub)



A partir de la imatge es pot deduir i l'angle dièdric de l'octaedre és 2α i que l'angle dièdric del tetraedre és el seu suplementari, $180^\circ - 2\alpha$.

El volum del tetraedre d'aresta $\sqrt{2}$ és:

$$1 - (4 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{3} \text{ del volum del cub unitat}$$

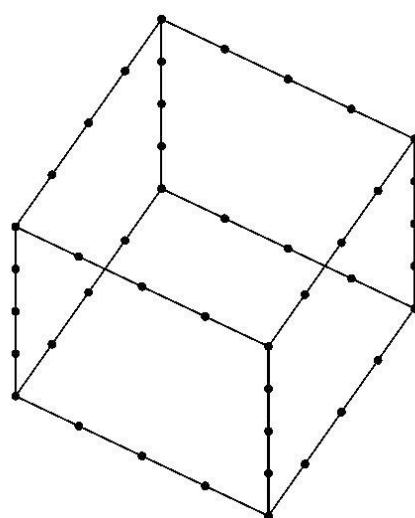
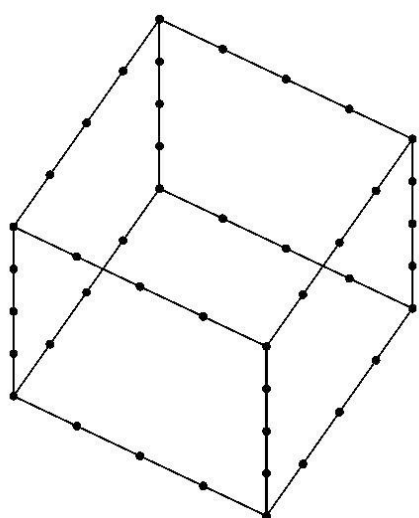
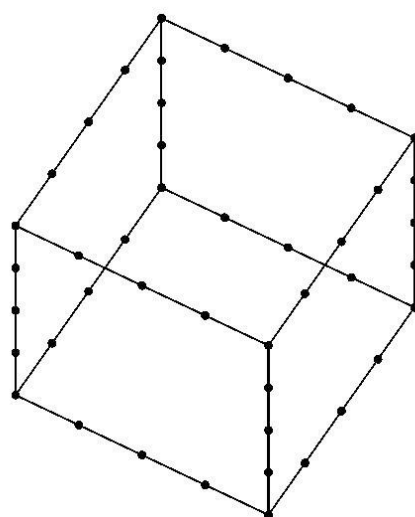
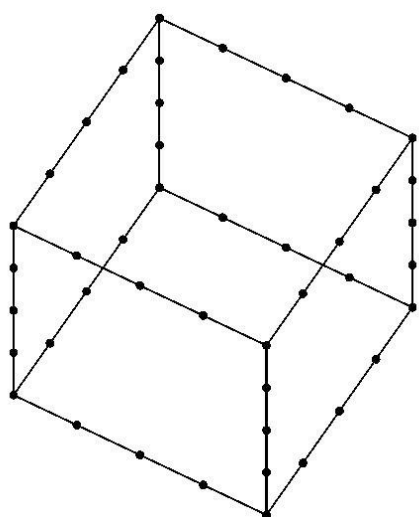
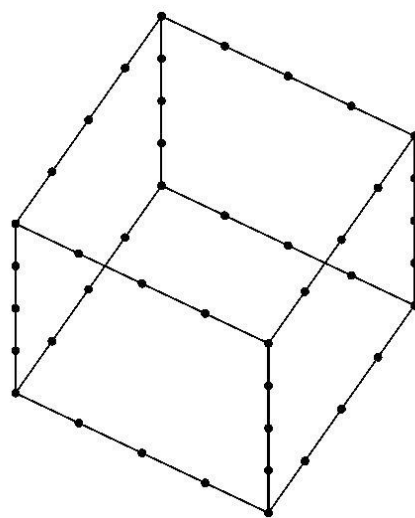
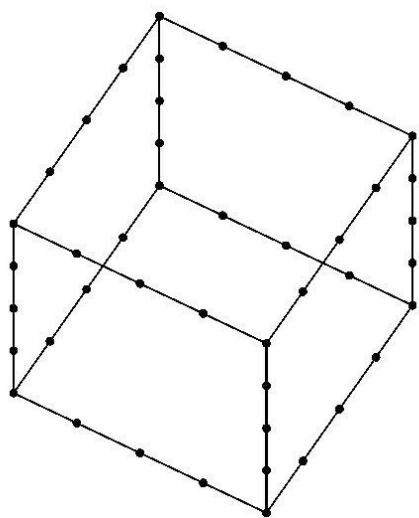
El volum de la piràmide quadrada d'aresta $\sqrt{2}$ és:

$$4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ del volum del cub unitat}$$

I el volum l'octaedre d'aresta $\sqrt{2}$ és:

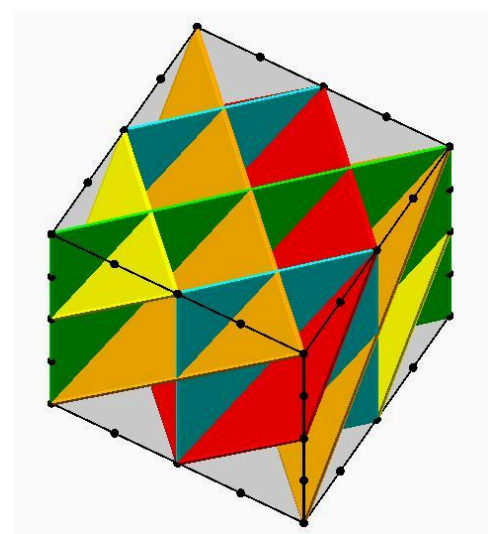
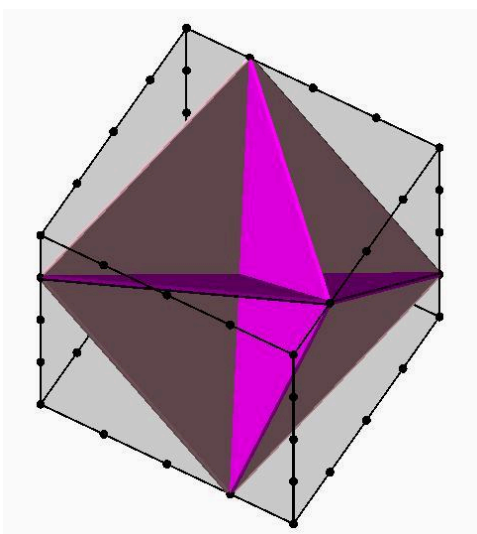
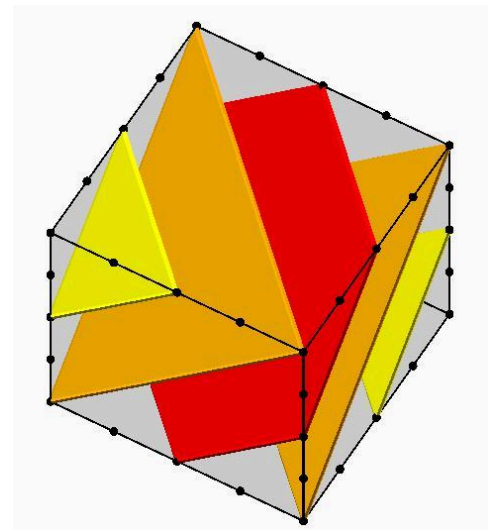
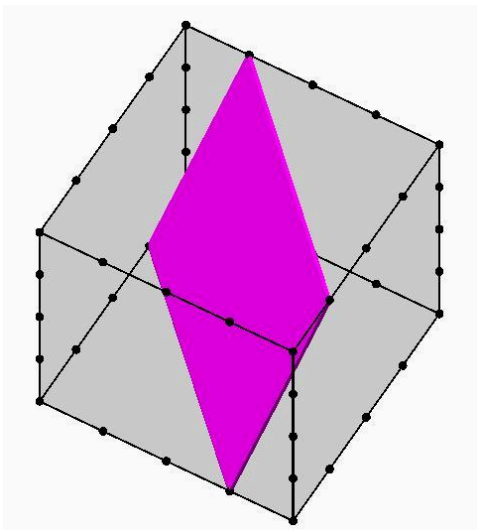
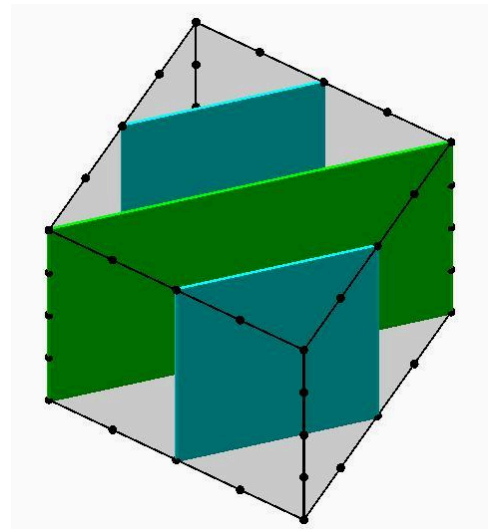
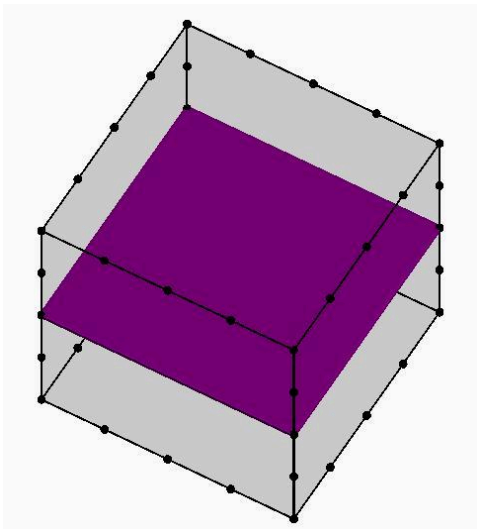
$$2 \times (4 \times \frac{1}{6}) = \frac{4}{3} \text{ del volum del cub unitat}$$

6 cubs amb les arestes dividides a quarts



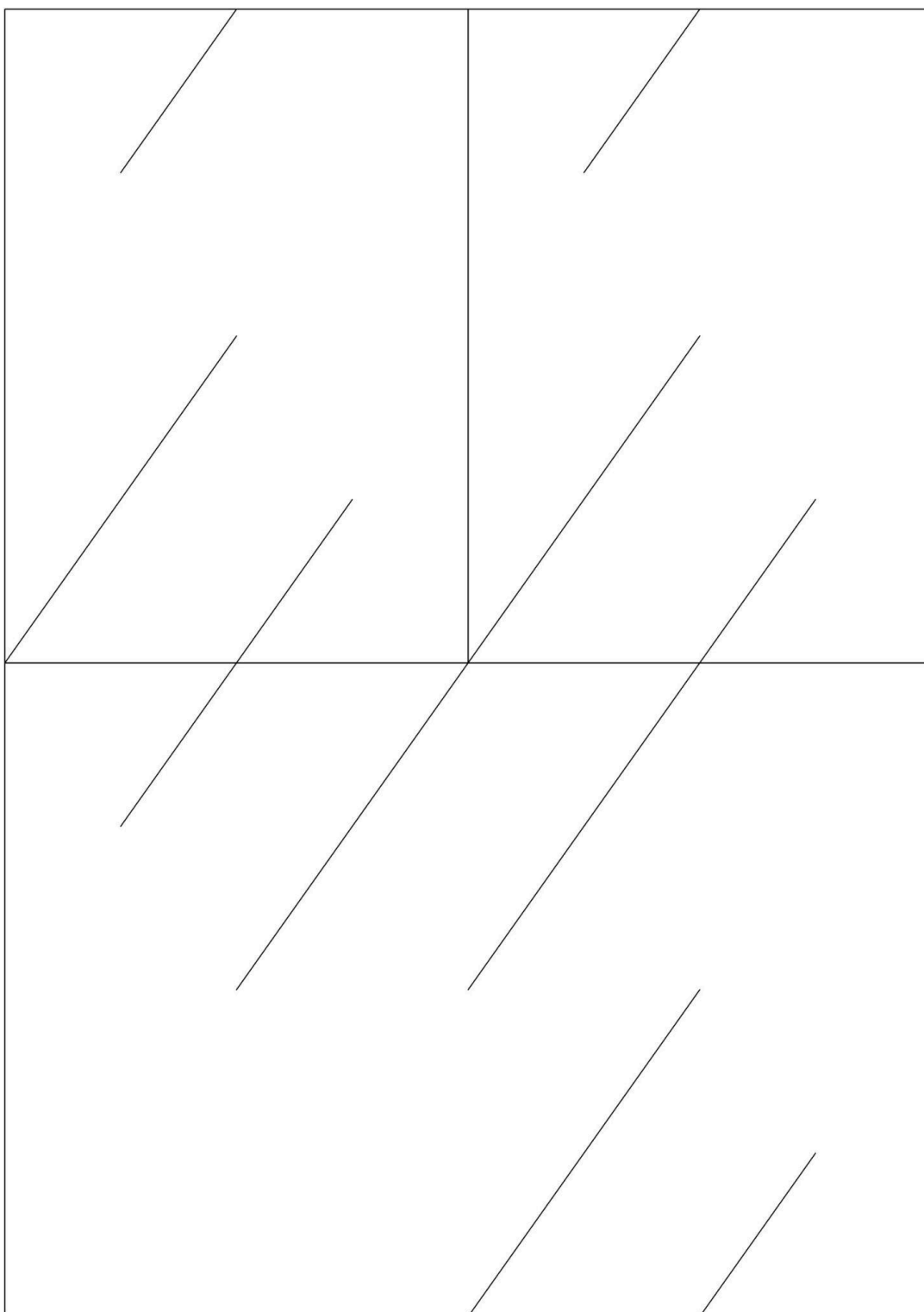
6 cubs amb les arestes dividides a quarts

(exemples)



Vuit seccions del cub

(A4 retallables pel cub de 10 cm d'aresta)



mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya

mmaca

Museu
de Matemàtiques
de Catalunya

