

# Tangram: una buena excusa para aprender geometría plana

Alberto Donoso Bellón

**SUMA** núm. 93  
pp. 83-89

Artículo solicitado por *Suma* en diciembre de 2019 y aceptado en febrero de 2020

El Tangram es un juego tipo rompecabezas muy antiguo que está compuesto por 7 piezas: un paralelogramo (romboide), un cuadrado y 5 triángulos (rectángulos e isósceles) de diferentes tamaños (ver figura 1). A día de hoy, aún no se conoce con certeza quién inventó el juego ni cuándo exactamente, aunque las primeras publicaciones de origen chino en las que aparece datan de muy a finales del siglo XVIII. Dos referencias clásicas que el lector puede consultar para conocer más en detalle sobre la historia de este juego son Elfers (1976) y Solum (2003). La idea del juego es bien sencilla, consiste en formar figuras respetando las tres reglas siguientes: tienen que usarse todas las piezas, estas tienen que tocarse pero no superponerse, y además las piezas tienen que descansar planas.

Este juego, aparentemente inocente, permite introducir conceptos de geometría plana de una forma sencilla a la vez que manejarse con cierta facilidad en

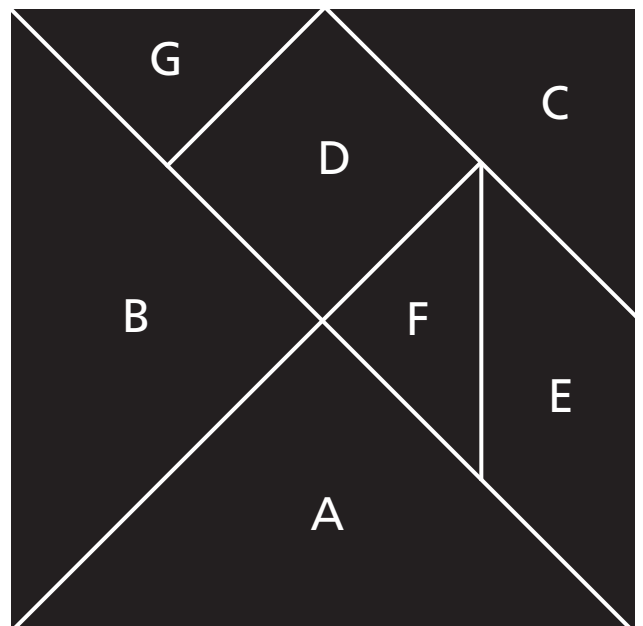


Figura1. Rompecabezas formado por el romboide (E), el cuadrado (D), y los triángulos (A, B, C, F, G)

el cálculo de áreas, perímetros y proporciones. Pero también nos puede llevar a profundizar en otras cuestiones matemáticas más interesantes como veremos a lo largo de este texto.

Gran parte de los contenidos que aquí aparecen fueron expuestos de una forma un tanto improvisada en el pasado *XII Seminario anual de Estalmat*, acontecido durante los días 29 y 30 de marzo de 2019 en la ciudad de Palma de Mallorca.

Soy consciente de que algunas de las actividades aquí propuestas seguramente puedan encontrarse en libros de corte pedagógico que traten sobre el tangram, que los debe de haber y muy buenos, o incluso en la red. Pero el foco de este trabajo está puesto en ser capaces de adaptar el artículo de Wang y Hsiung (1942) al alumnado mediante una serie de actividades guiadas para llegar a convencerse de la tesis que se plantea en el mismo: *usando las piezas del tangram solo pueden formarse 13 figuras convexas*.

Otro artículo interesante que interpreta a Wang y Hsiung (1942) sin llegar a hacer propuestas de actividades como se hacen en el presente trabajo es la referencia de Scott (2006). Si bien todas o la mayoría de las actividades aquí incluidas podrían usarse para confeccionar una sesión tipo del proyecto ESTALMAT, también podrían utilizarse algunas de ellas en las aulas de secundaria como recurso didáctico, a juicio del profesional docente cuando fuera apropiado. Confiando y deseando que lo uséis con tales propósitos, comenzamos.

## Una observación interesante como punto de partida

Si observamos las piezas que forman el rompecabezas de la figura 1, veremos que los triángulos *F* y *G* son las figuras más pequeñas y por tanto las que albergan menor área. Además, cualquiera de las demás figuras que componen el tangram se puede construir replicando una de las anteriores unas cuantas veces. Así, el cuadrado *D*, el triángulo *C* y el romboide *E* se consiguen juntando apropiadamente 2 triángulos de

tipo *F*, concluyendo que las tres figuras *D*, *C* y *E* tienen la misma área y por tanto el doble de *F*. Por último, los triángulos *A* y *B* (de igual tamaño) los podemos formar juntando 2 triángulos de tipo *C* o equivalentemente 4 de tipo *F*. De ahora en adelante, denominaremos *triángulo base* a un triángulo de tipo *F* (rectángulo e isósceles).

Nos encontramos por tanto en disposición de hacer la siguiente observación: *el área del tangram es equivalente a la de 16 triángulos base*. Este hecho es muy interesante y haremos uso de él más adelante. Por el momento nos servirá para comenzar con la siguiente actividad sencilla en la que trabajaremos el concepto de proporción.

**Actividad 1**

Supongamos que el área total del tangram es de 1 unidad cuadrada. ¿Qué fracción representaría cada una de las piezas que lo componen?

Pieza	A	B	C	D	E	F	G
Frac.							

Construye ahora con las piezas del tangram figuras equivalentes a las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{16}, \frac{8}{16}, \frac{11}{16}, \frac{14}{16}$$

Como bien es sabido, el hecho de que dos figuras encierren la misma área, no implica necesariamente que ambas tengan el mismo perímetro, tal y como le ocurre precisamente a la pareja *D* y *C* (o *D* y *E*). Vamos a partir de nuevo de un triángulo base, cuyos catetos tengan longitud uno.

Para calcular la longitud del lado más largo, llamado hipotenusa, podríamos hacer uso del famoso teorema de Pitágoras. Aunque no es estrictamente necesario echar mano de dicho teorema, la actividad se presta a ello y por eso vamos a deducir la versión del teorema para el tipo de triángulos rectángulos con los que vamos a trabajar en esta sesión, los isósceles.

**Actividad 2**

Observa las siguientes figuras. ¿Qué relación existe entre  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?

Aunque inicialmente asumimos que los catetos del triángulo base tienen longitud unidad, al aparecer en la figura las cantidades  $a$  y  $b$  podemos trabajar en cierta medida el pensamiento abstracto al manejar cualesquiera valores. Por otro lado, de la figura también se deduce que  $a=b$ . Quizás se podría aprovechar este momento para generalizar el resultado en los otros triángulos rectángulos, los escalenos. Podríamos recalcar la importancia de llegar al resultado esperado, esto es,  $a^2 + b^2 = c^2$ , algo que es cierto con independencia de lo que valgan los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  siempre y cuando sean los lados de un triángulo rectángulo.

También podríamos enfatizar que un resultado de tal envergadura ocupa el mayor rango dentro de la jerarquía de resultados matemáticos y que se le llama teorema, esto es, un hecho matemático sumamente importante que se puede enunciar y se puede probar. Una vez terminada esta actividad, estaríamos ya en disposición de calcular perímetros.

En la actividad 3 se han calculado los perímetros de las diferentes figuras del tangram.

Tras realizar los cálculos oportunos, podemos observar que en algunos casos, los valores numéricos de los perímetros se corresponden con números irracionales. Esto da pie a introducir el concepto de

orden y que podemos ilustrar con otro interesante ejercicio usando las piezas del tangram, el de ordenar números irracionales..

**Actividad 3**

Supongamos que el lado del cuadrado D mide una unidad de longitud. ¿Cuánto mide el perímetro de cada una de las piezas que componen el tangram?

Pieza	A	B	C	D	E	F	G
Perímetro							

**Actividad 4**

De nuevo supongamos que el lado del cuadrado D mide 1 unidad. Usando las piezas del tangram, ordena de mayor a menor los siguientes números

$$\sqrt{2} + 1, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$$

Como podemos apreciar en la figura 2, combinando algunas de las piezas que componen el tangram, no deberíamos tener dificultades en llegar a razonar que:

$$2 + \sqrt{2} > 2\sqrt{2} > \sqrt{2} + 1 > \sqrt{5}.$$

Llegados a este punto podríamos plantear al alumnado que empezara a manipular con las piezas del tangram e intentara formar, por ejemplo, todos los posibles triángulos utilizando alguna(s) o todas las piezas, y llegar a concluir que hay una propiedad que caracteriza a todos esos triángulos (¿de qué se trata?). Se podría continuar o no intentando reproducir algunas de las figuras más sencillas, como las que aparecen en la figura 3. Pero también podríamos seguir

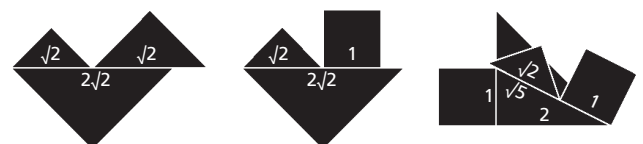


Figura 2. Solución de la actividad 4

profundizando en otros conceptos de geometría plana, como veremos en el siguiente apartado.

## Un resultado curioso

Antes de adentrarnos en el problema en cuestión, vamos a definir lo que se entiende por figura convexa. Se dice que una figura es convexa cuando el segmento que determinan dos puntos cualesquiera de la misma está íntegramente contenido en dicha figura.

La luna llena es un claro ejemplo de figura convexa; el cuarto creciente, no lo es. Por el mismo motivo, el cuadrado de la figura 1 es convexo, sin embargo, ninguna de las imágenes que componen la figura 3 lo es.

En 1942, dos matemáticos chinos, Fu Traing Wang y Chuan-Chih Hsiung, de la Universidad Nacional de Chekiang, demostraron que con las piezas del tangram solo se pueden construir un máximo de 13 figuras convexas (Wang y Hsiung, 1942).

Sorprendente, ¿verdad? A continuación, mediante una sucesión de actividades guiadas llegaremos a convencernos de la veracidad de dicho resultado, y que nuevamente lleva la etiqueta de teorema. Y como punto de partida, usaremos el hecho que destacamos en el apartado anterior: *el área del tangram es equivalente a la de 16 triángulos base*.

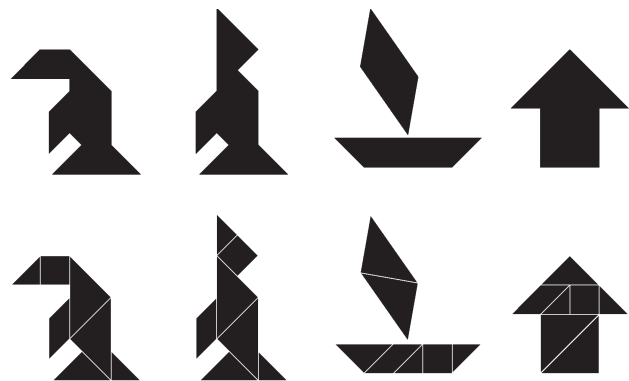


Figura 3. Algunas figuras sencillas

Así que empezamos cambiando la pregunta ¿cuántas figuras convexas (o polígonos convexas) pueden formarse con las piezas del tangram?, por esta otra: *¿cuántos polígonos convexas pueden formarse con 16 triángulos base?* En verdad, tampoco disponemos de una respuesta inmediata para esta última pregunta, pero lógicamente sospechamos que serán más de 13 (¿por qué?). La estrategia a seguir es tratar de determinar cuántos polígonos convexas pueden formarse con 16 triángulos base y después descartar aquellos que no pueden construirse con las piezas del tangram. De ahora en adelante, llamaremos *lados racionales* a los catetos de cualquiera de los 16 triángulos base, y *lados irracionales* a las hipotenusas de los mismos.

En lo que sigue, desmenuzaremos el texto de Wang y Hsiung (1942), lo que requerirá una serie de razonamientos complementarios que darán lugar a resultados parciales interesantes, llamados lemas, que habrá que ir probando hasta llegar a la prueba del teorema. Podría ser un buen momento para introducir el concepto de lema comentando que es la etiqueta que acompaña a un resultado que, en general, no tiene entidad de teorema, aunque podría haber excepciones. Empecemos planteando el siguiente reto.

### Actividad 5

Si 16 triángulos base se combinan para formar un polígono convexo, entonces ¿un lado racional puede apoyarse en uno irracional? En caso negativo, ¿qué conclusiones sacarías sobre los lados y los ángulos del polígono convexo formado?

Una forma de razonar esta afirmación es intentar formar figuras apoyando precisamente un lado racional en uno irracional y viceversa, para ver que finalmente los polígonos que resultan no son convexas. La primera parte de esta actividad es puramente manipulativa en lo que a las piezas del tangram se refiere. Algunos primeros pasos que soportan nuestro argumento podrían ser los mostrados en la figura 4. Aplicando repetidamente este proceso, llegamos a darnos cuenta que el polígono resultante no puede ser de

ninguna manera convexo. Todo esto debería conducirnos a realizar las siguientes afirmaciones:

- Si 16 triángulos base se combinan para formar un polígono convexo, entonces los lados de este nuevo polígono estarán formados por lados de triángulos del mismo tipo. Es decir, los lados racionales del polígono estarán formados por la suma de lados racionales de triángulos base; y los lados irracionales del polígono estarán formados por suma de lados irracionales de triángulos base.
- Si un ángulo del polígono es recto ( $\pi/2$ ), entonces los lados adyacentes tienen que ser ambos racionales o irracionales.
- Si el ángulo del polígono no es recto ( $\pi/4$  o  $3\pi/4$ ), entonces a ese vértice confluyen un lado racional y otro irracional.

En la figura 5 se muestran dos ejemplos de polígonos convexos que sí pueden construirse con 16 triángulos base (y que como veremos más adelante también con las piezas del tangram), que cumplen por tanto las tres afirmaciones que acabamos de enunciar. La actividad 6 supone un reto más.

La prueba es bien sencilla a la vez que elegante si tenemos en cuenta los dos siguientes hechos: primero,



Figura 4. Primeros pasos de una posible secuencia que prueba lo enunciado en la actividad 5



Figura 5. Dos ejemplos de polígonos convexos que pueden formarse con 16 triángulos base

#### Actividad 6

Demostrar que si 16 triángulos base se combinan para formar polígonos convexos, entonces a lo sumo serán octógonos.

que la suma de todos los ángulos (en radianes) de un polígono convexo de  $n$  lados es igual a  $(n-2)\pi$ ; y segundo, que el mayor ángulo que pueden formar dos lados del polígono es  $3\pi/4$ , luego se tendrá que cumplir que

$$(n-2)\pi \leq \frac{3\pi}{4}n$$

de donde se deduce que  $n \leq 8$ . Resulta también interesante la forma en que Scott (2006) aborda la resolución de dicho problema, razonando a partir de las combinaciones lineales de los ángulos de posibles polígonos convexos construibles mediante los ángulos disponibles ( $\pi/4$ ,  $\pi/2$  y  $3\pi/4$ ). Esto también serviría para poner de manifiesto que con frecuencia podemos encontrar diferentes caminos o estrategias para probar un resultado matemático. Por otro lado, es evidente que dichos polígonos podrán inscribirse en un rectángulo con todos los lados racionales sobre los lados del rectángulo. Y precisamente de eso trata la actividad 7.

Como acabamos de ver, curiosamente hemos reducido un problema puramente geométrico a otro descrito totalmente en términos algebraicos.

#### Actividad 7

Supongamos que el polígono convexo de la figura 6 apoya sus lados racionales sobre el rectángulo de lados  $x$  e  $y$  en el que se encuentra inscrito. Los parámetros a determinar serían  $x, y, a, b, c, d$ , todos ellos claramente múltiplos enteros del lado racional de un triángulo base. Toca ahora deducir que dichos parámetros deben satisfacer la siguiente ecuación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2xy - 16$$

junto con las siguientes desigualdades

$$\begin{cases} a+b \leq x, & c+d \leq x \\ a+d \leq y, & b+c \leq y \end{cases}$$

La resolución del anterior sistema de inecuaciones, en general, quedará fuera de alcance para la mayoría del alumnado (el lector interesado puede consultar los detalles en Wang y Hsiung, 1942). Apoyándonos ahora en algún software para resolver dicho sistema, obtendríamos las 20 posibles soluciones que aparecen recogidas en la tabla de la figura 7.

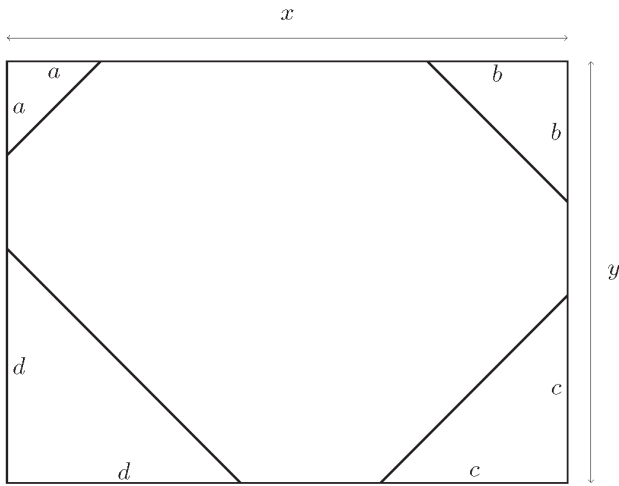


Figura 6. Polígono convexo (octógono) inscrito en el rectángulo de dimensiones  $x$  e  $y$

$x$	$y$	$a$	$b$	$c$	$d$
*1	8	0	0	0	0
*1	9	1	0	1	0
*1	9	1	0	0	1
*8	9	8	0	8	0
*4	6	4	0	4	0
2	6	2	0	2	0
2	6	2	0	0	2
*5	5	4	1	4	1
*5	5	5	0	3	0
3	5	3	0	1	2
3	5	3	0	2	1
2	5	1	1	1	1
2	5	2	0	0	0
4	4	2	2	2	2
4	4	4	0	0	0
3	4	2	0	2	0
3	4	2	0	0	2
2	4	0	0	0	0
3	3	1	0	1	0
3	3	1	0	0	1

Figura 7. Los valores de los parámetros  $(x, y, a, b, c, d)$ , solución del sistema de inecuaciones de la actividad 7

Un buen ejercicio consistiría ahora en intentar dibujar el contorno de las 20 figuras convexas y convencerse de que 7 de ellas (las que tienen un símbolo de asterisco \* en la figura 7) no pueden construirse con las piezas del tangram, como precisamente le pasa al rectángulo de la figura 8.



Figura 8. Polígono solución correspondiente al caso  $(x, y, a, b, c) = (1, 8, 0, 0, 0)$  que no puede construirse con las piezas del tangram

**Actividad 8**

Dándole valores a los parámetros  $(x, y, a, b, c)$  sobre el rectángulo de la figura 6, concluir que solo 13 polígonos convexas pueden formarse usando las piezas del tangram, determinando que se trata de: 6 cuadriláteros, 4 hexágonos, 2 pentágonos y 1 triángulo

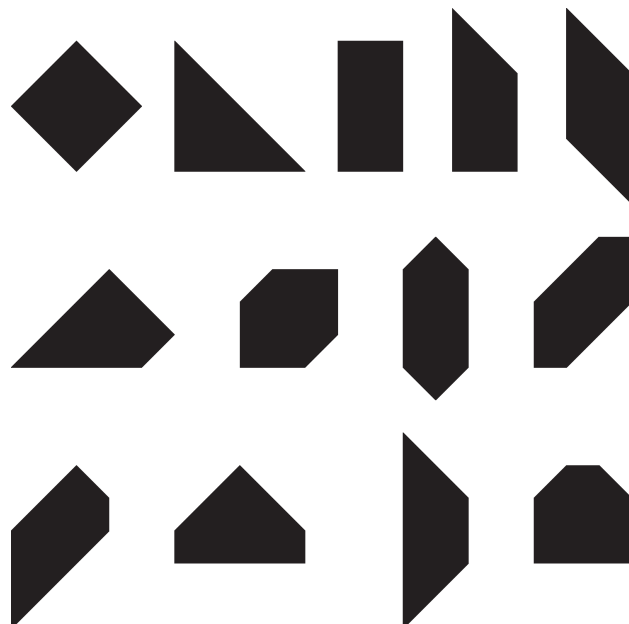


Figura 9. Las figuras convexas que se pueden construir con las piezas del tangram

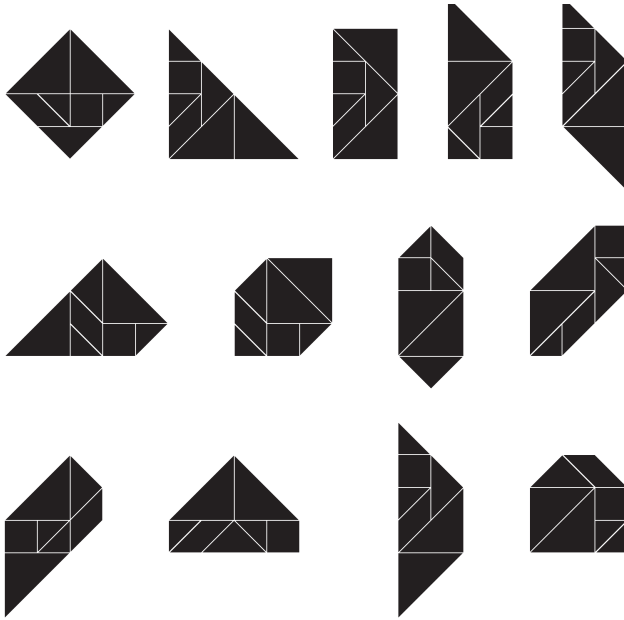


Figura 10. La solución de las 13 figuras convexas que se pueden construir con las piezas del tangram

### Actividad 9

Para terminar, plantearíamos la siguiente actividad que sería como una recopilación de todas las anteriores. Apoyándote en todo lo que has aprendido durante la sesión, ¿serías capaz de construir las 13 figuras convexas de la figura 9 que pueden hacerse con las piezas del tangram? La solución aparece en la figura 10.

### Referencias bibliográficas

- ELFFERS, J. (1976), *Tangrams: The Ancient Chinese Shapes Game*, Penguin, Nueva York.
- SCOLUM, J. (2003), *The Tangram Book*, Sterling, Nueva York
- SCOTT, P. (2006), «Convex tangram», *Australian Mathematics Teacher*, vol. 62(2), 2-5.
- WANG, F.T., y C.-C. HSIUNG (1942), «A theorem on the tangram», *American Mathematical Monthly*, vol. 49, 596-599.

---

### Aberto Donoso Bellón

Universidad de Castilla-La Mancha  
<alberto.donosobellon@uclm.es>