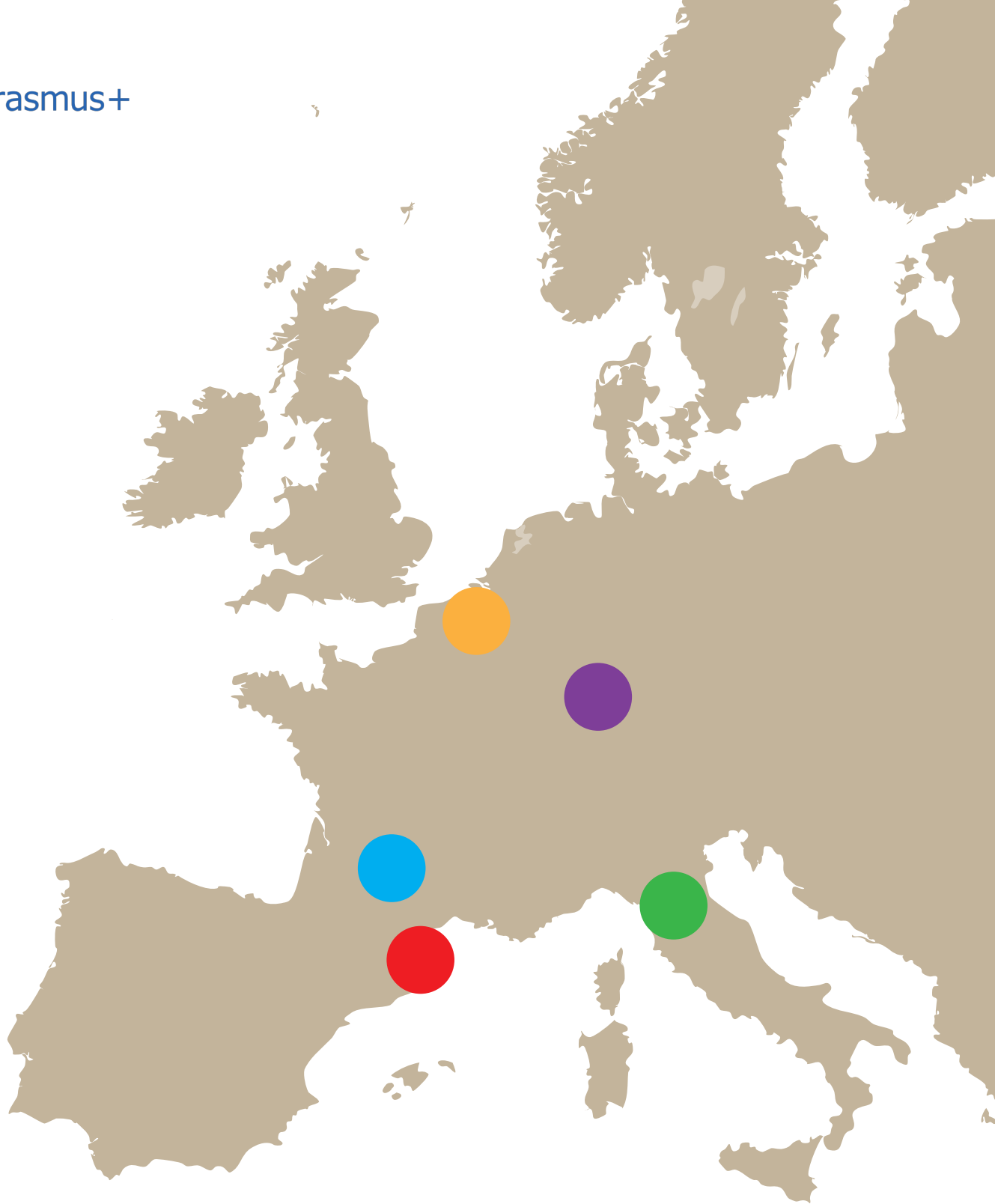
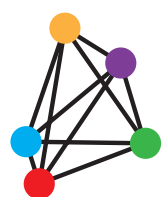




Una aproximació no formal a l'educació matemàtica



mathspaces

Intellectual Output 01 del projecte MdM-ERASMUS+.

Aquest projecte ha estat finançat amb el suport de la Comissió Europea.

Aquesta publicació reflecteix només les idees dels seus autors, la Comissió no pot ésser considerada responsable de l'ús que es faci de la informació aquí continguda.

Autors:

ASBL Entr'Aide, La Maison des Maths
Fermat Science
Il Giardino di Archimede
IMAGINARY gGmbH
MMACA - Museu de Matemàtiques de Catalunya

El MMACA és el coordinador d'aquest document, responsable del disseny, revisions del text i l'anàlisi dels gràfics.

© 2017 - Els autors

Contingut

0.	El projecte Mathspaces.	4
1.	Què és l'educació "no formal"? MMACA	12
2.	Benefici de la participació. Fermat Science	20
3.	Facilitacions per al sistema escolar. ASBL Entr'Aide, La Maison des Maths	25
4.	Fora de l'escola. Obrint ments. IMAGINARY	32
5.	Un mètode inclusiu. Il Giardino di Archimede	43
6.	Qüestionari per recollir les impressions dels usuaris. MMACA	49



El projecte Mathspaces

Les matemàtiques són una pedra angular de l'educació, i són fonamentals per entendre els reptes de les societats modernes. Tot i així, la percepció general de les matemàtiques les relaciona encara amb l'escola i l'educació formal. Algunes associacions i projectes miren d'apropar les matemàtiques als estudiants i al públic general en contextos externs a l'escola, com exposicions, fires o museus, que nosaltres anomenarem Mathspaces. Els cinc membres del projecte Mathspaces Erasmus+: La Maison de Maths, Fermat Science, Il Giardino di Archimede, IMAGINARY i el MMACA tenen una llarga experiència organitzant i obrint aquests espais matemàtics, i un llarg historial en l'ensenyament i comunicació de la ciència. Aquest booklet vol compartir les idees i experiències dels membres del projecte Mathspaces i com aquestes activitats han impactat en el procés d'aprenentatge de joves i adults, utilitzant un mètode no formal d'educació en matemàtiques.

En un estudi revelador sobre les ciències experimentals, J.H. Falk i L.D. Dierking^[1] afirmen:

[...] Les dades recollides pels informes del Programa Internacional per a l'Avaluació d'Estudiants mostren que un dels indicadors d'altres qualificacions als exàmens PISA era la participació en experiències fora de l'escola escollides lliurement, com les visites a museus de ciència.

[...] Ningú no ho ha dit tan clar com el Projecte de Recerca Familiar de Harvard^[2], que declarava: La presumpció dominant darrere gran part de les polítiques educatives és que l'escola és l'únic lloc i moment en què els infants aprenen. Aquesta presumpció és errònia. Quaranta anys de recerca acumulada mostren que les oportunitats d'aprenentatge fora de l'escola o complementàries són indicadors clars del desenvolupament, aprenentatge i rendiment acadèmic dels infants. La recerca també indica que els infants amb desavantatges econòmics o no, tenen menys accés en aquestes oportunitats. Aquesta desigualtat mina substancialment el seu aprenentatge i rendiment acadèmic.

Els projectes PISA de l'OCDE (1997)^[3], el Marc Europeu de Competències (2006)^[4] i la seva revisió (2017)^[5] representen oportunitats centrals per a obrir un diàleg entre institucions educatives formals i no formals per adaptar els models d'aprenentatge als nous temps i als seus reptes.

-
- 1 J. H. Falk and L. D. Dierking (2010). "The 95 Percent Solution". *American Scientist*, volume 98: 486-493
 - 2 Harvard Family Research Project (2009) http://www.hfrp.org/content/download/1072/48575/file/findings_predictor_OSTfactsheet.pdf
 - 3 <http://www.oecd.org/pisa/>
 - 4 http://ec.europa.eu/education/policy/school/competences_en
 - 5 https://ec.europa.eu/education/initiatives/key-competences-framework-review-2017_en

Els resultats PISA (2012) van mostrar que més d'un 22,1% d'estudiants europeus tenien resultat baixos en matemàtiques. Això vol dir que un de cada cinc joves a Europa no assoleix les competències bàsiques en moltes carreres valuoses per a l'economia actual.

La Comissió té l'objectiu de reduir aquest número a un 15% de cara al 2020. En molts països, però, la progressió és encara lenta i fins i tot, en alguns casos, el nivell està baixant.

Una de les raons pot ser la manca de compromís o participació dels aprenents, que tenen una percepció molt negativa de les matemàtiques; la majoria d'estudiants en comencen l'aprenentatge amb la idea ja implementada que "les matemàtiques són difícils". Amb l'objectiu de lluitar contra aquesta idea, els últims 10-15 anys hem vist emergir arreu d'Europa un nou moviment de museus i centres de matemàtiques. Aquests nuclis promouen una aproximació diferent i no formal, que ha provat el seu efecte en les competències d'aprenents de totes les edats, creant, sobretot, un nou vincle personal amb les matemàtiques.

Tot i així, aquests espais són encara pocs. Aquesta carença es deu principalment al desconeixement d'aquest enfocament i les dificultats per trobar els recursos i continguts adequats. Així doncs, els membres del projecte, amb el clar objectiu d'enfrontar el mal rendiment en les competències bàsiques de matemàtiques, vam decidir unir-nos per crear un projecte que vol impulsar el coneixement i l'ús d'aquests espais dedicats al tracte no formal de les matemàtiques a la Unió Europea.

El nostre projecte recull les propostes que fan Falk i Dierking al final del seu article, encara que facin referència a l'aprenentatge de les STEM i no només les matemàtiques i que analitzi la realitat dels EUA, que no és igual a la de la majoria de països europeus:

[...] No defensem que es dediquin menys esforços a millorar o ampliar l'educació científica a les escoles. [...] Volem proposar que s'incrementin els esforços per a mesurar les influències acumulatives i complementàries de l'aprenentatge dins i fora de l'escola, en l'aprenentatge de les ciències. Tot i així, com que l'educació científica escolar rep ja una ajuda en recursos molt major que les experiències d'aprenentatge lliure, qualsevol canvi, encara que modest, en aquesta proporció, podrà suposar un canvi important. Les dades suggereixen que seria una sàvia decisió.





ASBL Entr'Aide, La Maison des Maths

Tipologia:

Associació sense ànim de lucre

Administració:

Rue Jules Destree, 121
7390 Quaregnon (Belgium)

Seu:

Rue du Coron, 105
7390 Quaregnon (Belgium)

Pàgina web:

<http://maisondesmaths.be>

Contacte:

maude@maisondesmaths.be
<https://www.facebook.com/maisondesmaths>
<https://twitter.com/MaisonDesMaths>

Activitats principals:

- “Vine a descobrir un món mate-màgic”
- Acolim diversos grups escolars cada dia de la setmana (infantil, primària, secundària, batxillerats, universitats...)
- Formació de professorat en matemàtiques no formals (d'infantil a formació superior)
- Organització de “mate-versaris”.
- Curs de formació “Mathins Malins”
- 3 dies de portes obertes l'any
- Una botiga amb una selecció rigorosa de jocs basada en el seu interès matemàtic.
- Fires locals i regionals
- Conferència-espectacle: “The Very Math Trip”

Projectes principals:

- Projecte Erasmus+ : MathSpaces
- Projecte Erasmus+ : Informath
- L'obertura de Mathalis, una nova Maison des Maths a Liège, gener 2018.
- El MathLab: el primer laboratori europeu mòbil per a l'experimentació matemàtica.

Principal mecenes:

- Google
- Mathematikum
- La Région Wallonne
- King Baudouin's Foundation
- Fédération Wallonie-Bruxelles
- Erasmus +



FERMAT SCIENCE
Une autre idée des maths

Fermat Science

Tipologia:

Associació sense ànim de lucre

Seu:

Maison de Fermat
3, rue Fermat
82500 Beaumont de Lomagne (France)

Pàgina web:

<https://www.fermat-science.com>

Contacte:

thomas.fermat-science@gmail.com
contact@fermat-science.com
<https://www.facebook.com/FermatScience>
https://twitter.com/fermat_science

Activitats principals:

- UNA ALTRA IDEA DE LES MATEMÀTIQUES
- Fermat Science organitza festivals de ciències i matemàtiques, tallers, conferències, exposicions, espectacles, per difondre les matemàtiques lligades al plaer del descobriment. Usuaris el 2016: 25 000 persones.
- Organitza altres events al voltant de les matemàtiques, com tallers de ciència, trobades matemàtiques festives com Festi'Maths, Récréa'Maths, Mater'Maths, el Science Festival, Festival de Matemàtiques, la Setmana de les Matemàtiques, El Festival del Llibre Científic (exposicions, tallers, conferències, espectacles)
- Creació d'eines educatives: tallers, exposicions, kits educatius...
- A través dels diferents tallers, Fermat Science ofereix un enfocament concret de les matemàtiques i diverses nocions científiques. Els tallers, basats en la manipulació i els jocs, conviden els usuaris a la interacció i obren un procés d'aprenentatge que permet "veure i entendre"

Projectes principals:

- Projecte Erasmus+ : MathSpaces
- Projecte Europeu: Diffusion des mathématiques en Occitanie
- Obertura de La Maison des Maths, un nou museu de matemàtiques a Beaumont de Lomagne, 2019

Principals mecenes:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| • Fondation EDF | • Le département 82 |
| • Fondation Banque Populaire Occitanie | • La mairie de Beaumont de Lomagne |
| • La Région Occitanie | • Le LABEX CIMI Université Toulouse |
| | • Erasmus + |



Il Giardino di Archimede. Un Museo per la Matematica

Tipologia:

Associació sense ànim de lucre

Seu:

Via S. Bartolo a Cintoia 19a
50142 Firenze

Pàgina web:

<http://www.archimede.ms>

Contacte:

archimede@math.unifi.it
tel +39(0)557879594

Activitats principals:

- Museu interactiu dedicat a les matemàtiques i les seves aplicacions, en què els visitants poden familiaritzar-se amb les matemàtiques i descobrir-ne el rol en el nostre dia a dia. Dividit en quatre seccions independents i dedicades a diferents temes: la geometria de les corbes, el teorema de Pitàgores, Leonardo Fibonacci i les màquines de Galileo.
- Organitza conferències nacionals per a professors de matemàtiques i promou la història de les matemàtiques a l'ensenyament.
- Organitza la Festa della Matematica (anual).

Projectes principals:

- Projecte Erasmus+: MathSpaces
- WELCOME, projecte local per a museus inclusius.
- Le Chiavi della Città, projecte local per a escoles.

Principals mecenes:

- MIUR: Ministero Università e Ricerca
- MIBAC- Ministero per i Beni e le Attività Culturali

IMAGINARY gGmbH

Tipologia:

Associació sense ànim de lucre

Seu:

Mittenwalder Str. 48
10961 Berlin, Germany

Pàgina web:

<https://www.imaginary.org>

Contacte:

info@imaginary.org

Activitats principals:

- IMAGINARY crea i distribueix materials d'exposició interactius per a comunicar les matemàtiques modernes al públic en general i promoure l'educació matemàtica i el coneixement.
- Ofereix imatges, impressions 3D, materials manipulables i software interactiu open source a la seva pàgina web.
- Facilita recursos a les poblacions per a organitzar exposicions locals i així porta les matemàtiques modernes a cada racó de la Terra.
- Consolida una xarxa internacional d'entusiastes de les matemàtiques, funcionant com a laboratori d'idees per a la comunicació matemàtica moderna.
- És col·laborativa, global, gratuïta i propera a la recerca.

Projectes principals:

- IMAGINARY ha inspirat milions de visitants de més de 50 països en més de 27 llengües des del 2008.

Instal·lacions permanents a:

- National Museum of Mathematics, Nova York, EUA.
- Deutsches Museum, Munich, Alemanya.
- Centre comercial matemàtic "Mathematikon", Heidelberg, Alemanya.
- CAMP (Center for Application of Mathematical Sciences), Daejeon, Corea del Sud.

Exposicions itinerants nacionals:

- Bèlgica, França, Alemanya, Israel, Holanda, Rússia, Corea del Sud, Espanya, Taiwan, Turquia, Uruguai.

IMAGINARY gGmbH

Projectes principals (cont.):

Nombroses exposicions itinerants i events:

- Exposició NIMS-IMAGINARY al International Congress of Mathematicians, Seoul, Corea del Sud, 2014
- Exposició Mathematics of Planet Earth a l'Imperial College London, Regne Unit, 2015
- Exposició IMAGINARY al Next Einstein Forum (NEF), 2016, Senegal
- Exposició IMAGINARY al Volkswagen DRIVE, Berlin, Alemanya, 2017

Altres projectes:

- Projecte Erasmus+: MathSpaces
- Conferència IMAGINARY Open and Collaborative Communication of Mathematical Research, Berlin, Alemanya, 2016
- Xarxa de Comunicació Matemàtica (newsletters, recursos oberts, informació...), suport a la comunitat de professionals en divulgació matemàtica.
- Infraestructura i software per al nou museu d'Astronomia ESO Supernova a Munich, en col·laboració amb el Heidelberg Institute for Theoretical Studies (HITS).
- Competicions per imatges, obres d'art i materials expositius matemàtics, com el Mathematics of Planet Earth (2013 i 2017), MathLapse concurs de films (2016), Math Creations (2017).
- Tallers per a escoles i altres públics.
- Contribucions als mitjans (estudis, tallers, exposicions, publicacions, curtmetratges).
- Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach: textos curts sobre diversos aspectes de les matemàtiques modernes, escrits per recercadors del Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO)

Principals mecenes:

- | | |
|---|---|
| • Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) | • Klaus Tschira Stiftung (KTS) |
| • Leibniz Association | • Federal Ministry of Education and Research (BMBF) |



MMACA Museu de Matemàtiques de Catalunya

Tipologia:

Associació sense ànim de lucre
Declarada d'interès públic
Entitat oficial de formació de professorat

Seu:

Palau Mercader - Parc Can Mercader
08940 Cornellà de Llobregat

Pàgina web:

<http://www.mmaca.cat>

Contacte:

contacte@mmaca.cat
[@MMACA_cat](#)
<https://www.facebook.com/mmaca.cat>

Activitats principals:

- Exposició permanent manipulable i interactiva al Palau Mercader a Cornellà de Llobregat (Barcelona)
- De dos a quatre exposicions itinerants a l'any a Catalunya.
- Fires locals i regionals.
- Conferències i tallers a congressos de professorat, universitats, centres de formació oficials...
- Botiga amb materials seleccionats rigorosament pel seu interès matemàtic.

Projectes principals:

- Comunitat de Pràctiques d'Entitats Educatives formals i no formals.
- Exposició de miralls i calidoscopis en col·laboració amb CosmoCaixa.
- Projecte-Taller LeonarDomes.
- MathsWeek in Ireland (2015-2017)
- ScienceWeek in Ireland (2016)
- Projecte Maletins en col·laboració amb la Diputació de Barcelona.
- Projecte Tens Talent amb la Fundació La Caixa.
- Organitza la 3a Conferència MATRIX (octubre 2018)

Principals mecenes:

- | | |
|---|---------------------------|
| • FEEMCAT | • Ajuntament de Barcelona |
| • Societat Catalana de Matemàtiques | • Ajuntament de Cornellà |
| • Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya | • Fundació privada Cellex |
| | • Hewlett-Packard Spain |

1 Què és l'educació no formal?

Segons la UNESCO (Youth, Education and Action to the New Century and Beyond, Unesco, 24 July 1998):

Educació formal: sistema educatiu estructurat jeràrquicament, avaluat cronològicament, que va des de l'educació primària fins a la universitat o altres estudis superiors.

- Educació informal: el procés pel qual cada individu adquireix habilitats, valors, actituds i coneixements a través de l'experiència diària, a través de pares, amics, els mitjans de comunicació i altres influències de l'entorn.
- Educació no formal: activitats educatives organitzades fora del sistema formal establert dirigides a un públic d'aprenents amb uns objectius d'aprenentatge específics.

1.1. Diferències entre l'enfocament formal i el no formal

Els suggeriments que proposa Rogers (Rogers, 2005) són:

MÈTODE FORMAL (F.A.)	MÈTODE NO FORMAL (N-F.A.)
Selectiu: piramidal, selecciona i després entrena; el sistema rebutja participants en algunes etapes; un cop fora, no s'hi pot entrar; el sistema serveix a uns pocs (elitista); car	Obert: possibilitat d'entrar i sortir lliurement; sense pre-selecció; auto-selecció per part dels participants; sense rebutjos; sense fracàs; no hi ha abandonament permanent; econòmic
Allunyat de la realitat: període d'educació sense treball, seguit d'un període de treball sense educació; roba els participants del seu context per tancar-los en l'ensenyament a jornada completa; diferencia entre les experiències vitals i les experiències a la classe; aprendre per a un ús futur; irrellevant; colonial.	Educació dins la realitat: aprendre a ser, no a convertir-se en; aprendre a viure en el context del present; utilitza experiències i coneixement existent; currículum rellevant; aplicació immediata. Mitja ocupació, no pas completa; utilitza coneixements innats i autòctons.
Terminal: educació que omple i bloqueja; capitalització del coneixement; envia participants al món "entrenats" per a la vida, equipats completament sense cap més necessitat; certificat.	Contínua: l'educació no es completa mai, perquè sempre obra portes a nous horitzons; poc interès en certificats; admet "no ho sé".
Resultats: crea aprenents dependents; l'aprenentatge s'atura quan el professor no hi és.	Resultats: crea aprenents independents, segurs i amb continuïtat.

Ens sembla que aquestes anàlisis tendeixen a exagerar els defectes de l'una i els mèrits de l'altra.

Roger potser va subestimar els intents continus de l'ensenyament formal per renovar-se, influenciat per les contribucions de factors tan diferents com la pedagogia constructivista o la revolució tecnològica, intentant respondre als reptes d'una societat en continu i ràpid canvi.

Convençuts que hem de promoure l'intercanvi d'experiències i bones pràctiques entre escoles i museus/centres de ciències, hem mirat de considerar les diferències entre l'ensenyament formal i no formal amb una mica més d'objectivitat i en relació a:

- **Temporalització:** rigidesa respecte a previsions anteriors. Les activitats escolars tenen un temps determinat, i la flexibilitat és mínima. En l'ensenyament no formal, podem mirar d'aconseguir la màxima flexibilitat permetent als participants establir els temps que necessitin per executar una tasca, en relació al seu interès, reconeixement o habilitats.
- **Contingut:** fidelitat al currículum. L'ensenyament no formal es basa sovint en continguts disciplinaris que no es consideren al currículum. Part dels centres de ciències pensen que la seva proposta hauria de ser completament extra curricular, de manera que una visita a un museu pugui ser una experiència cultural original, completament diferenciada d'una activitat escolar.
- **Dinàmiques:** tasques individuals/col·lectives, resultats, verificacions... A les escoles, el progrés de l'alumne mitjà determina el ritme de la classe, condemnant aquells que no estan prou equipats a quedar-se enrere, i aquells que tenen més disposició i/o capacitats a la frustració. A les exposicions dels Centres de Ciència, cada participant, fins i tot format un grup de treball durant la realització d'una tasca, pot decidir quan parar. Una característica de l'ensenyament no formal és la heterogeneïtat dels grups que es formen, a vegades al voltant d'un sol mòdul. El resultat és una comunicació molt més real i menys previsible.
- **Relacions:** transmissió (de qui sap a qui encara no sap) i col·laboració (comunitat d'aprenents). En una situació no formal, els rols no s'assignen prèviament; l'intercanvi d'informació és lliure i bidireccional, l'autoritat es guanya amb fets, i és temporal.
- **Comunicació:** quantitat i tipus d'informació necessària per a portar a terme una tasca. A l'escola, el rendiment dels estudiants té un gran suport informatiu: professor, llibre de text més recursos suplementaris. En una exposició en un Centre de Ciències, la informació inicial es mira de reduir al mínim, a les normes requerides per a desenvolupar una tasca. Els facilitadors haurien d'ajudar tan poc com fos possible; suggerir, però mai resoldre; acompanyar, però mai guiar. L'aprofundiment o enriquiment en un tema hauria de ser delegat a una altra situació: un taller (al museu o a l'escola), recerca individual o, per què no, una intervenció posterior a l'escola, un pont amb l'educació formal.



Els mòduls desperten comunicació espontània entre visitants

Hi ha dos tipus de persones: aquells que estimen les matemàtiques i aquells que encara no han descobert que les estimen.
MMACA

Per suposat, el nostre interès, les experiències i propostes que fem estan centrades en les matemàtiques. Creiem fermament, però, que moltes poden ser extrapolades a altres disciplines, com sembla que demostrin els projectes de reforç de les STEM o STEAM.

Les matemàtiques són un joc amb unes certes normes simples amb símbols incomprensibles sobre un paper.

David Hilbert

De fet, les matemàtiques presenten un alt nivell de formalisme, indispensable per tractar certs aspectes teòrics complexos. Tot i així, però, un prematur i excessiu formalisme podria provocar que la forma i el llenguatge es convertissin en el contingut principal de la disciplina, excloent-ne una intuïció natural i el plaer gairebé jugarer tan típics de la raça humana.

El risc final és que una part de la població es negui a les matemàtiques. En construiran una imatge distorsionada com disciplina freda i buida, absolutament distanciada de la realitat, incomprensible i abstracta.

No deixem de jugar perquè ens fem grans; ens fem grans perquè deixem de jugar.

George B. Shaw

No estem parlant de «ciències divertides» ^[1], sinó d'un enfocament seductor per atraure més gent a crear una relació positiva amb les STEAM. Especialment quan:

L'humor és, de lluny, l'activitat més significativa del cervell humà.

Edward de Bono

1.2. Elements comuns a l'ensenyament formal i no formal

Aquest és el centre de la nostra proposta: creiem fermament que els enfocaments formals i no formals han de col·laborar. En un museu o en un centre de ciències no hem de repetir mecanismes escolars. No hem d'ensenyar, sinó oferir situacions obertes a l'aprenentatge. Una visita a un museu sovint desperta emocions positives, emocionants, que poden ser el començament d'un nou interès cap a les STEAM.

A les escoles, hem d'aprofitar cada oportunitat que permeti als estudiants desenvolupar els seus interessos i habilitats, individualment o en grup, i encoratjar-los a compartir la seva investigació amb la classe (minds-on).

1 <http://www.ecsite.eu/activities-and-services/news-and-publications/digital-spokes/issue-13#section=section-indepth&href=/feature/depth/fun-science-seductive-science>

És més, hi ha aspectes molt importants que han de ser desenvolupats a l'escola i als centres de ciències.

1.2.1. No pots ensenyar res a un ésser humà; només pots ajudar-lo a trobar les respostes dins seu.

Galileo Galilei

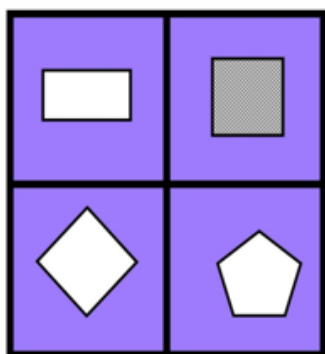
Un aprenentatge a llarg termini ha d'anar de la mà d'un desig profund d'aprenentatge per part de l'aprenent. Això vol dir que hem d'oferir activitats que estimulin l'interès i l'autonomia. Activitats que estimulin i els encoratgin a buscar i comunicar resultats en la seva feina.

Podem proposar problemes oberts, amb més d'una solució possible i discutir-ne l'estratègia. Un bon exemple és la pàgina web de codi obert, **Which one doesn't belong?** ^[2]



Els problemes oberts ofereixen la possibilitat de trobar solucions originals i noves estratègies que potser no havíem previst. Això pot portar a nivells de profunda satisfacció que també nosaltres hem pogut sentir alguna vegada, a vegades amb materials que coneixíem d'anys.

L'objectiu de promoure la investigació personal o grupal també es pot assolir amb l'ajuda de material informàtic. Començant per una situació estàndard (una forma, un dibuix, una taula de dades o una fórmula, depenent del programa), es poden introduir petites modificacions i veure'n els efectes canviar a velocitat real. La immediatesa de la resposta facilita el desenvolupament de la investigació. És fàcil veure com la seqüència d'aprenentatge descrita pel cercle de Kolb (veure secció 1.2.c) funciona també amb les activitats informatitzades.

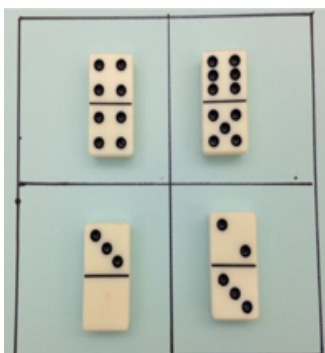


En la mateixa línia, seria interessant mostrar alguns dels problemes històrics resolts (fraccions recurrents, suma d'infinites seqüències de quadrats o nombres triangulars...) i/o irresolts (la conjectura de Fermat, la quadratura del cercle, la trisecció d'un angle...) acompanyats de materials virtuals o manipulables que mostrin la simplicitat de la pregunta i la dificultat de la solució.

1.2.2. El rol principal de l'educació a les escoles hauria de ser el de crear persones que són capaces de fer coses noves, no només repetir allò que han fet altres generacions.

Jean Piaget

Hem d'optar per l'ensenyament per competències; la transmissió de contingut i habilitats no és suficient.



Quin element no pertany al grup?
Per què?

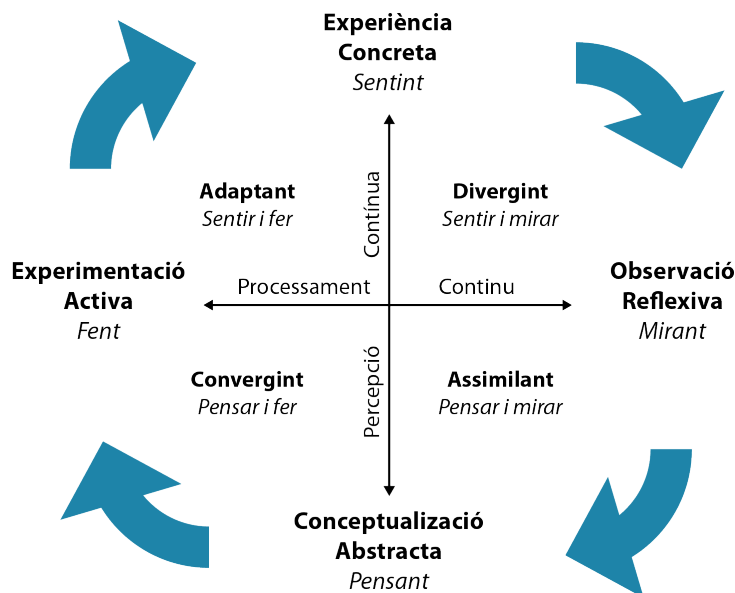
2 <http://woddb.ca/index.html>.

L'aprenentatge per competències té el focus en l'alumne i funciona naturalment amb l'instructor en el rol de facilitador. Aquest mètode permet a l'usuari dedicar el temps necessari per a aquelles situacions d'aprenentatge que trobi més difícils, practicant i perfeccionant tant com vulguin. Aleshores, poden emprendre el camí a dominar una nova habilitat a la que siguin més competents.

https://en.wikipedia.org/wiki/Competency-based_learning

1.2.3. Hi ha diferents maneres d'aprendre, per això hem d'oferir estratègies i experiències alternatives i diverses

El cicle de Kolb és un dels models més populars que mostren la relació entre experiència, reflexió, conceptualització i experimentació.



Hi ha qui necessita començar per una situació concreta, un repte motivador per a iniciar un procés d'aprenentatge personal, que ha de travessar totes quatre fases per consolidar-se. Però també hem conegut qui, a les nostres exposicions, necessita un marc teòric per a interactuar amb un mòdul.

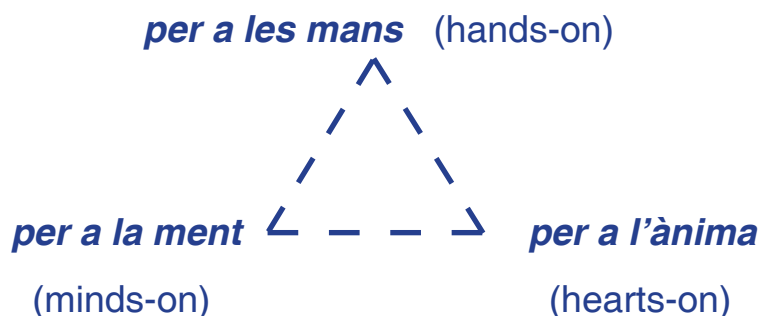
Cada individu ha de trobar la seva pròpia manera d'aprendre i escollir la millor manera de començar. Després, és important travessar les fases, ajudat per un educador o col·laborant amb els aprenents

En alguns centres de ciència oferim experiències manipulatives; reptes a resoldre. L'experimentació tàctil no és el nostre objectiu, sinó el començament d'un procés que ha de conduir a la construcció de conceptes, que seran reforçats a la seva vegada amb l'experimentació. Les fases serien:

Manipulació → construcció de l'objecte (taller) → construcció de concepte

Al mateix temps, hem d'assegurar-nos que els nostres materials siguin suggeridors en diferents aspectes.

Han de ser:



Fer, pensar i sentir no de manera seqüencial, sinó en un cercle virtuos.

1.2.4. Oferint espais perquè els estudiants parlin entre ells, els hi donem marcs perquè pensin per ells mateixos.

Lev S. Vygotsky

La comunicació és un dels aspectes fonamentals de l'ensenyament per competències i, per suposat, de les dinàmiques col·laboratives.

Veiem cada dia com grups de tres, quatre, cinc persones que no es coneixen, es formen espontàniament al voltant d'un mòdul per col·laborar en la solució del repte. Grups heterogenis per sexe, edat i habilitats convergeixen, proposen i verifiquen hipòtesis i proven solucions.

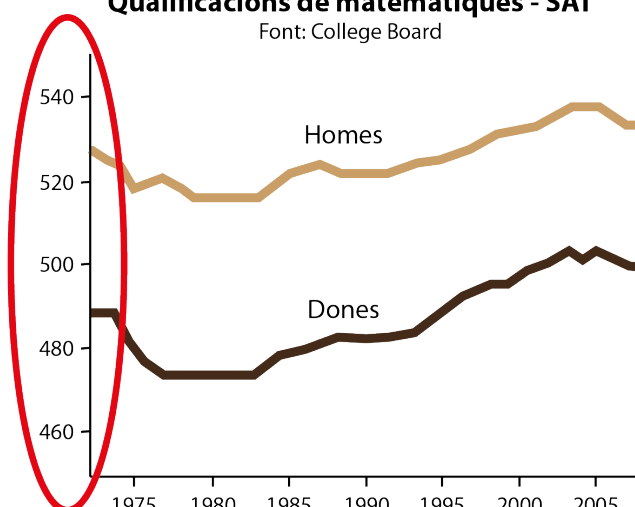
1.2.5. La ciència no és un joc de nois; no és un joc de nenes. És un joc per a tothom. És l'on som i cap on anem.

Nichelle Nichols

A les nostres exposicions i tallers no detectem diferències en interès ni habilitat entre nois i noies. Les diferències a què es refereixen algunes investigacions (no sempre de bona fe) no tenen fonament o proves significants, fins i tot entre adolescents, on algunes dinàmiques i actituds són més conflictives. La naturalesa col·laborativa de les activitats i la importància de l'aspecte comunicatiu afavoreixen la participació de noies, que sovint tenen un paper de lideratge. Les activitats competitives són poques i són sempre dirigides a la superació del rendiment personal, no de l'oponent. Els objectius importants són entendre els rols del joc i la col·laboració necessària per elaborar i exterioritzar una estratègia guanyadora, millorant així també l'autoestima.

Qualificacions de matemàtiques - SAT

Font: College Board



L'escala sembla escollida per tal d'amplificar la diferència.

1.3. Com podem implementar estratègies d'aprenentatge no formal?

Aquesta taula resumeix les accions que poden ser adreçades a centres educatius que vulguin introduir estratègies no formals per a millorar l'aprenentatge.

ACCIÓ	TEMPORITZACIÓ	DINÀMIQUES	CARACTERÍSTIQUES	
EXPOSICIONS	60 a 90 min.	Activitats lliures o guiades	Experiència	Motivació
			Sorpresa	Sedució
FIRES	10 min. a 3 h	Activitats seleccionades	Jocs	Diversió
			Competitivitat	Gran Públic
TALLERS	60 a 90 min.	Activitats guiades	Acompanyar i complementar el currículum	Construcció d'experiències i materials
CONFERÈNCIES	10 a 90 min.	Activitats participatives.	Sorpresa	Màgia
			Curiositat	Espectacle
FORMACIÓ DE PROFESSORAT I EDUCADORS	3 a 20 h	Activitats guiades	Teoria	Apropiació
			Aprofundiment	Apoderament
			Tutories entre companys	Creativitat

- **Exposicions:** són possibles diferents models, des d'una visita guiada a tallers lliures. En el primer cas, l'educador guia el grup a descobrir el concepte clau proposant o assenyalant determinats materials importants.

A la segona modalitat, l'educador només explica un mòdul, com a model de com utilitzar el material i emprendre els reptes. Finalment, deixen interactuar lliurement els visitants, minimitzant les seves intervencions. Han de suggerir, no solucionar, ajustant dinàmiques i recomanant nous reptes.

- **Tallers:** poden representar un bon pont entre l'exposició i l'escola, ja que el facilitador pot empènyer amb més facilitat a la conceptualització.

Un taller pot ser improvisat a l'exposició també, arran d'un mòdul o experiència, amb la idea d'aprofundir un tema que pot haver despertat interès.

També poden tenir lloc a la classe, construint o reconstruint materials per a entendre millor el significat i les matemàtiques darrere la fàcil interacció.

Inspirats per l'Exploratorium de San Francisco, obrim un debat: Quines són les diferències substancials entre els tallers a l'escola i al museu?

- **Fires:** l'objectiu de les fires és el de mostrar l'aspecte més agradable i divertit de les matemàtiques. Les activitats han de ser ràpides i atractives. Poden ser especialment interessants si els aprenents mateixos s'involucren en l'organització de la fira, actuant també com educadors.
- **Conferències:** poden ser una bona oportunitat per consolidar la presència d'un museu o centre de ciència al territori, mostrant els aspectes més sorprenents de les matemàtiques (la profunda relació amb els jocs de màgia, per exemple). Les conferències també representen una fantàstica oportunitat per al diàleg – tan necessari com inusual- entre educadors, treballadors culturals, creadors i recercadors.
- **Formació de professorat i educadors:** les estratègies d'aprenentatge no formal son especialment útils en aquesta situació, on compartir experiències i co-elaborar noves estratègies és l'objectiu principal. Els professors han de familiaritzar-se amb el material i les activitats per tal de poder controlar i adaptar els mecanismes a la situació de la seva classe. És una situació paradigmàtica on introduir tasques i competències i estimular la construcció de conceptes matemàtics personals.



El debat en aquesta àrea és molt obert:

- Formació destinada a activitats durant les visites al museu (curta, almenys 3 hores) o per a iniciar una col·laboració museu-escola (llarga, almenys 20 hores).
- Possibilitat d'intervenir en l'organització de la formació inicial del professorat.
- Comunió entre la formació de professorat i educadors.

2

Beneficis de la participació

Per començar aquest capítol, buscarem exemples concrets i quotidians per poder contestar la pregunta:

2.1. És cert que l'escola acaba amb la creativitat?^[1]

Parlar amb nens i nenes de 4-5 anys sobre què han fet a l'escola ens revela molta informació. El llenguatge precís i concret que fan servir per a descriure aquells descobriments, cantar una cançó o recitar una poesia, parlar de l'evolució de l'ésser humà, el seu cos... I tot i així, aquest infant no té llibreta ni torna a casa amb deures. Les escoles bressol són un gran exemple educatiu: les parets, les taules, les estanteries, tot està ple de materials, panells, jocs que estimulen la vista, el tacte, l'olfacte, l'oïda i fins i tot el gust.



Treball creatiu a
La Maison des Maths

A l'escola bressol^{[2] [3]} s'estimulen els cinc sentits. Les investigacions en neurociència i, en particular, la Programació Neurolingüística demostren que el procés d'aprenentatge és més efectiu quan s'estimulen múltiples sentits. Els mestres d'escola bressol usen aquest principi regularment, el descobriment a partir de la manipulació és el vector principal d'aprenentatge.

És important que ens preguntem també si aquestes estratègies funcionen si considerem l'aprenentatge de conceptes abstractes (com ho són molts conceptes matemàtics) o si estem centrant-nos en aquest aspecte per reiterar que la experimentació activa és important a l'escola.

Alguns autors suggereixen que els estudiants d'educació secundària són menys creatius^[4] i tenen més dificultats en el desenvolupament de tasques complexes... És que l'escola acaba amb la creativitat?

2.2. Música i matemàtiques

Aprendre música és part de l'aprenentatge formal. De fet, l'execució d'una peça musical requereix assumir els codis que porten a desxifrar-la: el solfeig. Independentment de la tria de l'instrument, si es tenen unes bases fixades, un només necessita seguir els requeriments per a produir sons

- 1 http://www.huffingtonpost.com/line-dalile/a-dictator-racing-to-nowh_b_1409138.html
- 2 Stein BE, Stanford TR, Rowland BA (December 2009). "The neural basis of multi-sensory integration in the midbrain: its organization and maturation". *Hear. Res.* 258 (1-2): 4-15.
- 3 Stein BE, Rowland BA (2011). "Organization and plasticity in multisensory integration: early and late experience affects its governing principles". *Prog. Brain Res.* 191: 145-63.
- 4 <https://people.goshen.edu/~marvinpb/11-13-01/Effects-of-Stereotypes.html>
<http://www.sheknows.com/parenting/articles/1024783/kids-are-getting-smarter-but-less-creative>
http://faculty.ucr.edu/~aseitz/pubs/Shams_Seitz08.pdf
<https://www.mpg.de/8934791/learning-senses-vocabulary>

i localitzar les notes. El sistema formal de la partitura pot ser expressat a través d'una eina concreta de representació: l'instrument.

Amb un instrument, tots els contactes previs a l'aprenentatge de la teoria o sistema de codis de la música, poden ser considerats aprenentatge no formal. Potser no faran que hi hagi més músics professionals, però sí amplien el nombre de joves que senzillament aprecia la música.

L'aprenentatge no formal de les matemàtiques es basa en la funcionalització de l'aprenentatge matemàtic, en forma, per exemple, de decisions raonables i raonades, formulacions o arguments, que portin a la construcció de conceptes matemàtics sense un ensenyament o entrenament previ directe o formal. Això estableix una gran importància al com i per què de l'aprenentatge de conceptes, la seva organització i compartimentació per al seu ús, aprofundiment i adaptació a noves situacions.

2.3. És el sistema formal la única manera d'aprendre?

És obvi que el sistema educatiu formal no és l'únic camí per a l'aprenentatge al món. El mètode prova i error, per exemple, és molt important per a l'aprenentatge dels infants i ha estat sempre present en la història de la humanitat, que ha descobert, manipulat i modelat conceptes des de fa mil·lennis.

En la majoria de currículums de les escoles occidentals, les matemàtiques ocupen una posició prominent, i el seu ensenyament i aprenentatge està profundament arrelat en aquest model. És globalment acceptat que els conceptes matemàtics són objectius, universals i fonamentals, potser més que en cap altra disciplina científica. Aquestes matemàtiques formals i/o acadèmiques es consideren una eina imprescindible que tot estudiant ha d'adquirir i dominar al final de l'educació obligatòria. A això s'hi afegeix la cultura dels resultats quantificables, l'examen del coneixement, les certificacions...

Tot i així, aquests conceptes no es veuen necessàriament reflectits en les enquestes de resultats acadèmics, en el cas de les matemàtiques, comparant resultats amb els d'altres països de l'OECD.

Aquesta llista agrupa molts països amb diferents situacions econòmiques i socials, fent impossibles i injustes les comparacions, raó per la qual aquests resultats haurien de ser presos amb cura. En qualsevol cas, ens



Aprenentatge diversificat a
La Maison des Maths

Els PISA 2015 contenen els resultats de 540 000 estudiants de 15 anys a 72 països de l'OECD i fora. Aquest informe és considerat representatiu dels 29 milions d'estudiants d'aquests 72 països i economies. Els resultats es basen en la puntuació obtinguda en ciències, el focus principal de l'estudi.

#	PAÍS	PUNTS	#	PAÍS	PUNTS	#	PAÍS	PUNTS
1	Singapur	564	6	Macau (Xina)	544	15 ex	Alemanya	506
2	Japó	532	7	Canadà	516	20	Bèlgica	507
3	Estònia	520	8	Vietnam	495	26 ex	França	493
4	Taipei (Xina)	542	9	Hong-Kong	548	28 ex	Espanya	486
5	Finlàndia	511	10	Xina	531	34	Itàlia	490

obliga a preguntar-nos si existeix un perill d'estancament en l'ensenyament formal de les matèries. Seria impensable no ensenyar conceptes, mètodes o entrenar habilitats específiques, per suposat, però reproduir models educatius obsolets és suïcida.

Pot ser que aquestes diferències entre rendiments i països siguin el resultat de diferents i millors mètodes d'ensenyament? Què fan diferent els països que tenen millors resultats?

2.4 - Quina és la millor manera d'aprendre?

Segons l'informe de Rocard "Science Education: Now"^[5] and the Eurydice report "The teaching of mathematics in Europe: common challenges and national policies"^[6], l'ensenyament efectiu de les matemàtiques requereix diferents mètodes educatius.

Hi ha consens general que determinats mètodes, com l'aprenentatge basat en problemes ABP, la investigació o la contextualització són particularment efectius a nivell de resultats i actituds enfront de les matemàtiques. Tot i que la majoria d'agències centrals europees diuen que ofereixen eines, mètodes i guia en l'ensenyament, hem de donar suport i enfortir les estructures i els mètodes que encoratgen la participació activa i el pensament crític dels aprenents.

Naturalment, com en el cas de l'aprenentatge de la música, haver assimilat els codis de les matemàtiques (reconèixer els números, operacions bàsiques...) és un avantatge. Però també hi ha qui aprèn música sol. En Paul McCartney, per exemple, no va assistir a cap escola formal, fa això que sigui menys competent en ritme, mesura, oïda...? Per altra banda, altres músics potser sí que tenen uns estudis i una formació en música formal; totes les opcions són possibles, obertes, i sovint aquests contextos es troben per treballar junts.

En qualsevol cas, val la pena plantejar-se com els avenços tecnològics, fins i tot els més senzills, com una calculadora o un corrector ortogràfic, han canviat els components per a desenvolupar bé una tasca. Els aspectes més tècnics i mecànics estan sent delegats a les màquines, mentre que els éssers humans seguim sent essencials per a la creativitat, la conceptualització i el control de qualitat, que també ha patit canvis gràcies a la rapidesa amb què les màquines poden recollir dades.

En el camp de la creació musical, hi ha programes (com el Sibelius, el Finale Note-Pad, el MuseScore) que, amb una dinàmica heurística, ajuden a transcriure composicions fetes a oïda en un pentagrama, permetent tenir una resposta immediata i per després fer els ajustos necessaris. La millor tecnologia (programes interactius, oberts i comunicatius) té aspectes pe-



Documents de referència de la UE sobre aprenentatge.

- 5 http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
- 6 http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key_data_series/134EN.pdf

dagògics interessants.

Precisament, però, part de la creativitat humana té a veure amb trencar patrons ^[7]: poder parlar d'allò que no existeix, mentir, demostracions reductio ad absurdum o proves per contradicció... Això pot xocar amb les limitacions clàssiques de la feina mecànica, però proposar-se reptes mecànics cada cop més difícils i poder enfrontar tasques consistentment ajudarà tant el músic professional com el diletant.



Mòduls.
La Maison des Maths

2.5. Les matemàtiques no formals al centre de l'aprenentatge

Molts estudis (e.g. Carraher & Schliemann) ^[8] ^[9] ^[10] reafirmen la idea que les matemàtiques no formals poden proveir una base on construir conceptes i coneixement matemàtic més sofisticat.

Aquests dos autors consideren que les activitats de classe es poden transformar de manera que permetin a l'aprenent experimentar amb la pluralitat de situacions matemàtiques, eines i conceptes que estableixen una connexió explícita entre el dia a dia i allò que aprenen a escola.

Amb el no formal, l'aprenent està al centre de l'aprenentatge: descobreix, manipula i modela, ja sigui individualment o en grup, com a part d'un enfocament col·lectiu centrat en l'aprenent i la seva experiència i acció.

Cal també fer especial menció dels beneficis inherents d'aquests sistemes a nivell de cooperació, creativitat, llibertat de decisió, comunicació... que, tal vegada, poden ser més importants encara que les matemàtiques.

2.6. Una necessitat per a la nostra societat

En conclusió, treballar en el no formal respon a una necessitat social de motivar la gent jove, sense discriminació de sexe o origen social o econòmic, a entrar en el món de les STEAM, tan necessàries i centrals en el desenvolupament de les nostres societats.

La motivació i l'autoestima augmenten amb els mètodes no formals perquè qui vulgui pugui decidir i escollir quin repte resoldre, com fer-ho, en

- 7 "Hem d'aprendre bé les regles per poder trencar-les de la manera justa". Dalai Lama.
- 8 Carraher, D. & Schliemann, A.D. (2002). Empirical and Logical truth in Early Algebra activities: From guessing amounts to representing variables. *Symposium paper NCTM 2002 Research Presession*. Las Vegas, Nevada, April 19-21. [View abstract]
- 9 Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (2002). The Evolution of Mathematical Understanding: Everyday Versus Idealized Reasoning. *Developmental Review*, 22(2), 242-266. [View abstract]
- 10 Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? In J. Moshkovich & M. Brenner (Eds.) *Everyday Mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 131-153.



Contes matemàtics a
La Maison des Maths

grup o sol, pensar, discutir, explicar, i com repartir el seu temps, si limitar-se a la resolució del repte o aprofundir l'estudi. Activat els principis de l'experimentació, l'aprenent pot, en certa manera, convertir-se en agent autònom del seu procés d'aprenentatge en matemàtiques. Es poden promoure activitats universalment accessibles (comptar, situacions a l'espai, mesurar, dibuixar i construir, jugar i explicar), desenvolupades segons diferents models culturals.

Segons el constructivisme, qualsevol usuari pot iniciar el seu propi procés de conceptualització i abstracció.

El primer pas és preparar la intervenció del professor, amb l'objectiu de sistematitzar el coneixement adquirit, proposar generalitzacions, fórmules, algorismes i analitzar teoremes. Pot seguir cercant relacions amb altres disciplines no científiques, aplicacions i enriquir-ne el contingut.

És possible pesar el Teorema de Pitàgores, dibuixar vocabulari matemàtic en les pendents vertiginoses d'un con, o inflant un globus esfèric o el·lipsoïdal, dibuixar patrons simètrics o mesurar l'entrada del palau de les Mil i Una Nits.

***El futur no és de ningú. No hi ha cap precursor,
només gent que arriba tard.***

Jean Cocteau

Som nosaltres que hem de fer servir les lliçons de la nostra història, les nostres experiències com a infants i les nostres descobertes personals per donar vida i alegria a les matemàtiques i assegurar-nos que es mantenen vives i alegres en el futur més pròxim.

3

Facilitacions per al sistema escolar

En els últims anys, la importància de les competències matemàtiques ha estat més present que mai. Aquestes competències són ara considerades necessàries per al creixement personal, la inclusió social i fins i tot el civisme.

El món escolar no pot quedar-se fora del debat o evitar qüestionar-se la manera com es tracten les STEAM i les matemàtiques en concret.

Ann Siéty, psicòloga de l'educació francesa, diu al respecte:

Alguns estudiants amb dificultats perceben les matemàtiques com una disciplina en què no es reconeixen i que no té res a veure amb ells.

En els infants, les primeres experiències i primers contactes són primordials, però sovint trobem estudiants que tenen por de les matemàtiques i fins i tot construeixen les seves rutes acadèmiques per a evitar-les. Tastar la descoberta de nou, l'ús d'estratègies diverses, pot ajudar-los a crear una nova connexió i millorar la seva relació amb la matèria, obrint noves i millors possibilitats d'aprenentatge.

Segons Céline Alvarez, lingüista i autora de *Les lois naturelles de l'enfant* (Les lleis naturals de l'infant):

La natura encoratja els infants a aprendre de la millor manera possible: donant-los un desig intrínsec d'aprendre més. Els infants no necessiten explicacions expertes formals, necessiten viure i enfrontar-se a la successió contínua de xocs que és el món.

Recentment hem vist un canvi en la manera en què ensenyem les matemàtiques, amb la introducció de noves estratègies no formals, amb més activitats dedicades a la recerca i menys exercicis d'interès poc clar.

Els camins a la descoberta poden tenir un impacte molt significatiu, tant en la manera com aprenen els estudiants, com en la qualitat d'allò que aprenen. Pot ajudar molt a la comprensió dels estudiants i ajudar-los a integrar les normes i procediments matemàtics. Aquesta nova comprensió pot ser també font d'immens plaer per a qui aprèn, en termes tan quantitatius com qualitatius.

3.1. En matemàtiques, són compatibles el formal i el no formal?

3.1.1. Suports necessaris comuns

Els aprenents necessiten i volen suport. Segons Céline Alvarez:



Fermat Science

Els infants tenen unes eines d'aprenentatge poderosíssimes, però necessiten la guia d'algú més avançat que ells que pugui aconsellar-los, mostrar-los els elements importants i empènyer endavant el procés.

A l'hora d'ensenyar les matemàtiques, podem centrar-nos en diversos àmbits, focalitzar-nos en principis, teoremes o processos, o bé podem buscar-hi l'aplicació real. Això, però, determinarà la naturalesa de les interaccions, incloent-hi les relacions entre professor i grup d'alumnes, la relació directa entre professor i alumne o les dinàmiques grupals dels mateixos aprenents.

L'educador ha d'encoratjar l'intercanvi positiu i la comprensió i comunicació efectiva entre aprenents, redirigir la seva feina dintre d'uns marcs i estructures útils i assegurar-se que cada aprenent se sent dins de la xarxa de suport mutu que hauria de ser el grup.

És també important canviar l'actitud dels educadors respecte als alumnes i començar per un principi que Ann Siéty enuncia:

Tot aprenent és intel·ligent. Si en algun moment algú no entén quelcom, és per un motiu concret que li impedeix la comprensió.

Així, és responsabilitat de l'educador trobar les eines necessàries per ajudar els aprenents a triomfar. El procés d'aprenentatge no es pot basar en la repetició, sinó en el plaer de descobrir la pròpia intel·ligència. L'èxit és una eina molt poderosa per motivar a treballar més i millor.

3.1.2. Aprenentatge no formal i matemàtiques divertides^[1]



Fermat Science

Fer divertides les matemàtiques o introduir elements de joc no vol dir fer-les més fàcils o baixar el nivell. És increïble com de lluny pot arribar el joc en l'assumpció d'estratègies o conceptes complexos. Permet donar un aspecte atractiu a la disciplina i ajuda els aprenents a integrar normes i aspectes tècnics amb major facilitat, permetent-ne l'aprofundiment. Les matemàtiques del joc reemplacen l'obligació per la instrucció. Cap alumne no està obligat a res: senzillament se li demana que accepti les normes del joc per poder-hi jugar. Segons Stella Baruk^[2], doctora en matemàtiques

1 Viladot, P.; Stenglen, E.; Fernandez, G. – "From fun science to seductive science" – *Spokes* #13, nov. 2015

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Stella_Baruk



Fermat Science

i recercadora en psicologia, els usuaris aprenen ràpidament que un bon domini de les normes del joc porta a l'èxit. Per a un estudiant enmig d'un joc, és un cas de comprensió en el sentit etimològic de la paraula: *cum prehendere*, agafar per i amb un mateix. Desdramatitzar les estratègies educatives també pot ajudar a tornar més fàcilment a situacions d'aprenentatge formal.

El concepte de joc és molt ampli; pot incloure jocs tradicionals, trucs de màgia, origami, puzles o la construcció d'objectes. Jugar és una eina fonamental per a l'aprenentatge de les matemàtiques.

a. Un exemple de taller i joc: el Tangram

El Tangram es pot fer servir per desenvolupar les capacitats d'observació i introduir la geometria entre els més joves de manera visual.



Fermat Science
Tangram

L'origen del Tangram data del segle VII a la Xina, tot i que no es va importar a Europa fins al final del segle XVIII: la llegenda parla d'un antic emperador xinès que admirava una exquisida rajola de terracota. Per accident, la rajola li va caure al terra, on es va trencar en set trossos de formes diverses (i ben conegudes). Mirant de reconstruir, en va, el preuat quadrat de fang, va formar milers de figures i objectes diferents.

Les normes són senzilles, després d'haver seguit les direccions necessàries per a construir les set peces del Tangram, l'objectiu és el de reconstruir una silueta donada que pot representar lletres, animals, personatges, figures geomètriques... Hi ha milers de possibilitats amb més de 200 models geomètrics o figuratius per construir, amb diferents graus de complicació, i un sostre obert a la originalitat.

L'ús que se'n pot fer en matemàtiques és claríssim.

Començant per un full de paper, doblant i tallant en diferents parts podem obtenir, una a una, les set peces. Això permet analitzar i comparar les peces, sota la guia de l'educador, que suggerirà, preguntarà, observarà i establirà connexions amb el currículum de l'escola.

En segona instància, si s'hi vol aprofundir, és possible oferir més activitats en passos successius:

- Representar números (considerant el triangle menor com la unitat)
- Representar fraccions (considerant el quadrat original com la unitat)
- Construir els 13 polígons convexos (la demostració del perquè només n'hi ha 13 pot ser una activitat particularment interessant per a estudiants avançats^[3])
- Construcció de quadrats i rectangles amb una, dues... set peces.

És important subratllar que tots aquests problemes són problemes oberts,

3 <http://archive.bridgesmathart.org/2012/bridges2012-553.pdf>

a vegades irresolubles, però que inciten una discussió entre estudiants, treballant també la comprensió i la comunicació.

b. Una altra manera: la història de les matemàtiques

La història de les matemàtiques pot oferir eines per entendre i contextualitzar problemes històrics, enriquint l'aprenentatge, donant-li un sentit. En lloc de presentar conceptes allunyats de la realitat, col·loca les matemàtiques en el seu lloc en la llarga línia de l'evolució humana.



Usar la història dels descobriments en matemàtiques també permet entendre que hi ha un lloc per a tothom en l'aventura del descobriment humà, motivant i integrant els alumnes. Entendre, per exemple, la necessitat de Tales per mesurar la piràmide; Eratòstenes i la mesura de la circumferència de la Terra; el problema de la corba braquistona en què participen una dotzena dels personatges més importants de les ciències modernes.

3.1.3. Sinèrgia entre mètodes

Les opinions en educació han evolucionat. Considerant les definicions del formal i no formal queda clar que l'educació ha de ser un procés continu que combini els mètodes.

a. Per què usar aquests mètodes?

Són les carències del “model d'escola tradicional” que han despertat aquest interès pels mètodes no formals com a complement de l'escola. De fet, aquest interès s'explica també pels avantatges que proporciona a nivell de desenvolupament socio-econòmic i socio-cultural, especialment després de les decepcions que ha portat el model actual, que és ambiciós, però ni pràctic ni concret i, sovint, fins i tot allunyat de la vida real dels participants. Els costos són encara alts i per tant, l'expansió, limitada. Són aquestes limitacions i mancances de recursos allò que fa tan importants les activitats fora de classe.



Geometria i Història a
Fermat Science

b. Com pot el no formal complementar les accions de l'escola?

En l'aprenentatge no formal, el participant ha d'agafar un paper central i actiu en el seu procés, analitzant i observant les conseqüències directes d'allò que va aprenent. Independentment del contingut, coneixements o habilitats de cadascú, l'aprenentatge no formal ofereix l'oportunitat de desenvolupar la autonomia i la participació. En aquest context, la col·laboració i assistència mútua és essencial, arrelada en l'habilitat espontània dels infants per a compartir amb altres, una habilitat innata que ha de desenvolupar-se per a benefici de tothom. Segons Céline Alvarez:

Cap professor pot competir amb la facilitat de transmissió de coneixements que hi ha entre nens de diferents edats: la fascinació d'un infant de cinc anys per un de 3 és excepcional, com ho és l'entusiasme espontani per ajudar aquells que ho necessiten.

Això implica introduir materials de qualitat i atractius, que despertin la curiositat dels infants i els inspirin a enfrontar-se a les dificultats d'aprendre.

També vol dir revisar el concepte d'error, definit, entre altres, per Agnes Rigny i Ann Siéty. Fer errades a la fase d'experimentació no és un problema ni un error. El resultat ha d'observar-se a través del resultat esperat i aquesta nova situació. Si no hem arribat en aquell resultat que hipotitzàvem, el següent pas és entendre quin és l'error i reiniciar l'experimentació amb una nova hipòtesi. Aquest mètode condueix al coneixement real i durador, en contra de l'aplicació de normes imposades per adults, apreses sense ser enteses.

L'aprenentatge actiu porta a una major autoconsciència, ensenya a analitzar per ells mateixos i acostuma a agafar la iniciativa dins el grup i mesurant el seu impacte.

És aquest procés de participació el que fa de l'educació no formal una eina formidable a l'escola de la ciutadania. No hi ha un estàndard imposat, no hi ha una obligació de contestar en un temps limitat ni sancions. Es respecta el desenvolupament personal, l'objectiu no és aconseguir una bona nota, fer content l'adult, sinó gaudir de la descoberta i de la satisfacció de superar un obstacle i poder accedir als coneixements que ho han fet possible.

3.1.4. Eliminar el risc de desigualtat

Veiem un augment en escoles i universitats privades que respon als desitjos i necessitats dels estudiants afavorits (i els dels seus pares), quan la educació pública és essencial per a la majoria dels menys afavorits. Aquest forat, que sembla eixamplar-se entre les institucions públiques i privades, posa en perill tant l'educació formal com la no formal.

És més, per als estudiants allunyats dels mecanismes d'integració cultural, el llenguatge matemàtic pot ser raó d'incomprensió, generant fracassos i estrès per les contradiccions entre matemàtiques i realitat. Si el formalisme matemàtic es converteix en l'element essencial, només reproduïm els mecanismes socials que han fet de les matemàtiques una de les més grans eines de selecció de classe. Optar per un apropament a la realitat no vol dir oblidar un llenguatge correcte o conceptes abstractes, vol dir desenvolupar-lo, aplicar-lo i mostrar-ne l'ús i significat.

Per eliminar els riscos de desigualtat, és necessari desenvolupar:

- Activitats no formals accessibles a tots i a situacions fora de l'escola.
- Formacions per a professors i educadors en diferents mètodes educatius i llenguatge matemàtic.

3.2. Resultats i èxit

3.2.1. Motivació

El nivell de motivació per a aprendre matemàtiques és important en els resultats dels estudiants. Existeixen estratègies per a donar suport a la motivació dels aprenents en gairebé tots els països europeus.

Una actitud positiva i la confiança en les pròpies habilitats van lligats directament amb el rendiment dels aprenents. La motivació influència decisions de participació i pot definir les actituds de diferents estudiants envers l'educació i les seves decisions al respecte.

La recerca al voltant dels factors principals que determinen la motivació dels alumnes suggereix que cal utilitzar mètodes que estimulin, siguin diversos i estiguin directament relacionats amb l'experiència personal dels estudiants. L'educació no-formal pot crear aquestes condicions ideals necessàries per millorar el rendiment i la motivació de tots els aprenents.

3.2.2. Resultats

La millora dels resultats acadèmics no hauria de ser un objectiu directe, però sí un resultat de la major autoestima i domini d'habilitats i eines, que modificaran positivament com emprendran les matemàtiques i el seu rendiment acadèmic.

3.3 - Com coordinar els diferents mètodes educatius?

3.3.1. Aprenentatge no formal a les escoles

L'ús de jocs, materials manipulables i experiències diferents a la classe de matemàtiques és fàcil. No només es tracta d'enfrontar-se a les dificultats personals, també és important ajudar els alumnes a construir i apropiat-se de coneixements matemàtics articulant-los conjuntament amb lliçons "normals".

El professor ha d'avaluar l'evolució de les dinàmiques i resultats per tal d'organitzar les diferents fases i introduir nous temes, reptes i propostes.

Les sessions de joc no han de ser un premi després d'un esforç "de debò" reservat per als ràpids o més hàbils; han de tenir un rol en si mateixes i tota la classe hi ha de participar a la vegada. L'objectiu no és jugar, sinó aprendre de la manipulació, donant un nou significat a l'error i una nova importància als conceptes concrets que porten al procés d'abstracció.

Els professors poden i haurien d' utilitzar totes les eines disponibles, ofertes per als diferents actors de la cultura matemàtica local, creant tallers o petites exposicions a la mateixa aula..

3.3.2. Actors matemàtics i museus de matemàtiques

Les experiències educatives no formals fora de l'aula sovint són incompreses, especialment degut al fet que són feina d'organitzacions no governamentals o associacions locals. Aquestes estructures, associacions i museus de matemàtiques arreu del món ofereixen activitats educatives i eines per a les escoles utilitzant mètodes no formals.

Per a conèixer-los, podem visitar aquesta base de dades de diferents organitzacions dedicades a la difusió i divulgació matemàtica:

<http://www.mathcom.wiki>

3.3.3. Una decisió política: un exemple, propostes a França

Al desembre de 2014, Najat Vallaud-Belkacem, ministre d'Educació de França, presenta la Mathematical Strategy, que ha de millorar el nivell dels estudiants en aquesta matèria. S'apliquen deu mesures al voltant de tres eixos:

- Programes de matemàtiques actualitzats a la situació present
- Una millor formació del professorat
- Una nova imatge per a les matemàtiques

En aquest últim eix hi trobem l'acció número 7: Promoció d'un ecosistema favorable a l'aprenentatge. La naturalesa lúdica de les matemàtiques i la seva presència en el món digital es desenvoluparà per motivar els estudiants i promocionar-ne l'autonomia. El lloc que ocupa el joc a l'aula de matemàtiques també ha de guanyar importància. Per a més detalls, visiteu:

<http://www.education.gouv.fr/cid84398/strategie-mathematiques.html>

» L'école
change
avec
vous »
**STRATÉGIE
MATHÉMATIQUES**



4

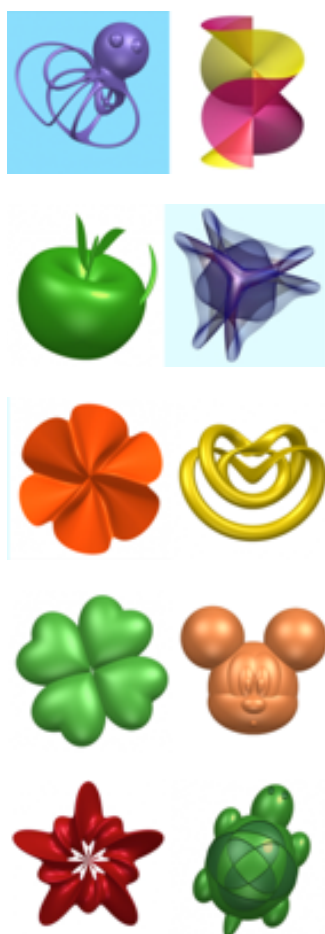
Fora de l'escola Obrint ments

Vivim a l'era de la informació. Abans de l'existència dels mass media (diaris, ràdio TV, internet...) les fonts d'informació i l'accés al coneixement eren fonamentalment dos: llibres i professors experts. Fa almenys dos anys que entenem que l'educació universal és un objectiu transversal a les societats modernes i el sistema escolar és la institució més eficaç dedicada al seu assoliment: la transmissió i intercanvi de coneixement, valors i formació d'uns a altres. Els llibres i els professors experts segueixen sent recursos fonamentals i preciosos, maximitzats per una estructura de suport. A l'escola, un nombre petit de professors i llibres pot educar a gran escala. I avui en dia, amb la tecnologia de què disposem, la informació és abundant, instantània i pràcticament gratuïta.

Però, per suposat, la informació no és coneixement. És necessari entendre, incorporar la informació de manera ordenada, estructurar les idees al cervell, aprendre a ser crítics, aplicar conceptes, desenvolupar habilitats... El soroll i les dades inútils poden obstaculitzar les nostres idees i el torrent continu d'estímuls competeix amb l'atenció de nens, joves i adults. Així doncs, l'altra gran font d'il·luminació i saviesa, els professors, segueix i seguirà sent, previsiblement, la més important institució educativa per a les generacions futures.

La formació escolar ha de ser formal i general, establir fonaments sòlids que permetin als estudiants emprendre noves passes en la seva carrera educativa. Ha de ser sistemàtica i exhaustiva, de manera que permeti als bons estudiants un continu desenvolupament de coneixements i talents. En les matemàtiques, això vol dir que el coneixement s'ha d'estructurar verticalment, és necessari el domini d'una noció per a poder-hi construir de noves a sobre, sense deixar enrere cap pas important. Aquesta metodologia, però, obvia una visió panoràmica, horitzontal, de les matemàtiques, tan necessària. Temes relacionats amb la motivació, l'aplicació, la filosofia de les matemàtiques, desenvolupament històric... no tenen prou prominença en un model vertical, i és imprescindible que formin part de l'aprenentatge dels ciutadans i ciutadanes moderns culturitzats. Un context no formal, fora de l'aula, pot ajudar a portar aquests elements a la discussió, donant una visió horitzontal complementària a les estructures ja creades, utilitzant tots els recursos disponibles. Entre aquests recursos és important subratllar la importància del factor humà dels educadors, mediadors i facilitadors, segurament molt connectat amb el dels professors que participen en la realitat formal de la matèria.

Alguns dels aspectes de les matemàtiques formals que es poden tractar des d'una perspectiva no formal podrien ser els següents:



Treballs per al concurs internacional de SURFER fetes per nens i nenes d'escoles.

4.1. Abstracció



El programa Morenaments permet dibuixar utilitzant els 17 grups de simetries del pla.

Una idea fonamental de les matemàtiques és l'abstracció. No només com a antònim d'allò "concret", sinó també l'extracció dels principis fonamentals que governen l'objecte d'estudi. Aquests principis fonamentals sovint governen altres objectes que semblaria que no guarden cap relació a primera vista. Podem utilitzar, com a exemple, el concepte de simetria per descriure els diferents nivells d'abstracció i com orientar-los des de dins i fora de l'escola.

La simetria apareix arreu a la natura, en la repetició de motius, en les flors, en animals i en altres fenòmens naturals com la cristal·lització dels minerals o en la química, en l'art, en dibuix, escultura, música i en innumerables jocs i puzles. Molts museus de ciències i fins i tot parcs d'atraccions han desenvolupat instal·lacions amb un enfocament matemàtic de miralls, calidoscopis i altres jocs òptics^[1]. Utilitzant calidoscopis, podem generar infinitat d'imatges a partir de la reflexió de certs objectes en miralls disposats estratègicament. Totes aquestes imatges, però, comparteixen la mateixa estructura, les mateixes simetries, que depenen, no dels objectes reflectits, sinó de la posició dels miralls.

Algunes exposicions utilitzen software^[2] que permet generar els 17 enrajolaments bi-periòdics del pla a partir de translacions, rotacions i reflexions d'un dibuix fet per l'usuari. Així, les possibilitats del dibuix són infinites, però l'estructura de les simetries només pot ser una de les disset possibles^[3]. Les exposicions inclouen sovint també mòduls relacionats amb políedres, on també es manifesten diverses simetries.

La simetria s'acostuma a presentar com a concepte geomètric, però des d'un punt de vista matemàtic també es pot descriure amb la idea fonamental de grup com a concepte algebraic. El concepte de grup és bastant avançat, no per la dificultat de la seva definició, sinó pel nivell d'abstracció necessari per imaginar i manipular aquesta estructura algebraica. Els grups s'acostumen a introduir al primer o segon curs d'àlgebra bàsica a la universitat. A partir de la definició i alguns exemples, s'avança a través de teoremes i demostracions, com ara el Teorema de Lagrange, que tracta l'ordre dels grups i els seus elements, o la classificació dels grups abelians, arribant a poder manipular-los i deduir propietats d'aquestes estructures. Això és, per suposat, el resultat d'un aprenentatge formal avançat en matemàtiques, i, segurament, apropiat només per a persones que busquen un coneixement molt avançat.

1 Com el Museu de Matemàtiques de Catalunya, Matemilano, Le labosaïque, Mathematikum, i molts altres.

2 Per exemple Morenaments, GeCla o iOrnaments.

3 Hi ha una demostració que només existeixen 17 d'aquests grups utilitzant topologia, *orbifolds* i la característica de Euler. Els elements d'aquesta demostració es mostren al públic general al GeCla, de l'Associació Atractor (vegeu també el DVD *Symmetry – the dynamical view*). Aquest tema no es menciona mai a l'escola, ni tan sols en cursos convencionals de matemàtiques a la universitat, només en alguns cursos especialitzats en topologia geomètrica.

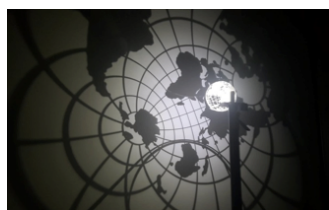
La idea crucial és que el concepte de grup, una estructura d'elements que es poden combinar per a generar nous elements amb propietats molt bàsiques, és un concepte accessible per a tothom que tingui una mica de curiositat, quasi independentment del seu recorregut matemàtic. Les simetries d'un calidoscopi, d'una tessell·lació plana o d'un políedre poden ser identificades com a grup particular, etiquetades i classificades. Aquest grup en particular pot governar un calidoscopi, però un altre calidoscopi pot arribar a ser absolutament diferent, perquè el seu grup de simetries és diferent.

Aquesta idea es pot transmetre sense ni tan sols fer servir la paraula “grup” o fent explícita la seva definició (és feina de l'educador identificar el seu públic, el seu rerefons matemàtic i exposar la informació apropiada). Les simetries en el pla apareixen en certs llibres de text, i molts estudiants de química hauran observat les estructures de certs cristalls i poden conèixer bé les classificacions cristal·logràfiques. El missatge que es pot traslladar des de fora l'escola és que les simetries no són un concepte depenent de la química, l'art o els políedres, sinó un marc teòric que explica tots aquest fenòmens.

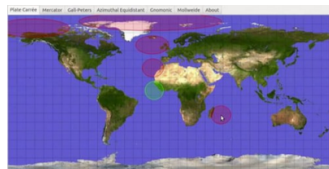
4.2. Modelització



Galeria Matemàtica al London Science Museum.



Làmpara impresa en 3D mostrant la projecció estereogràfica de Henry Segerman.



The Spehere of the Earth, guanyador del primer premi de la competició de mòduls Mathematics of Planet Earth 2013.

La idea de modelització és, en molts casos, dual a la d'abstracció. La modelització és l'aplicació pràctica de conceptes matemàtics per a resoldre, o almenys comprendre, un problema concret. Molts professors poden trobar la pregunta “i això, per a què serveix?” irritant; les matemàtiques són, per suposat, no només una ciència instrumental, i es poden practicar per amor al coneixement, però aquesta és una pregunta legítima, que mereix una discussió argumentada. Les matemàtiques aplicades, són, de fet, gairebé un camp en si mateixes, i el marc de més de la meitat de la producció i recerca matemàtica del món. Es podria argumentar que la física és, en si mateixa, matemàtica aplicada, però establim una definició de les matemàtiques aplicades com l'ús de conceptes no trivials per a la resolució d'un problema no trivial, amb la intervenció i col·laboració, tant de matemàtics com d'experts en el camp concret d'estudi.

Aprendre sobre les matemàtiques aplicades o la modelització pot ser enriquidor fins i tot des d'un punt de vista cultural; mostrant les interconnexions dins dels coneixement humà, és també motivador a l'hora d'emprendre nous temes, i mostra un aspecte important de les matemàtiques com a llenguatge. L'educació formal inclou la física, la química, la tecnologia i altres ciències, en totes elles podem trobar exemples de modelització. Exclòs o negligit pels currículums matemàtics més tradicionals, pot ser un debat interessant fora de l'escola.

La iniciativa Matemàtiques pel Planeta Terra ^[4] està enfocada a fenòmens

4 El nom fa referència tant a una iniciativa de recerca (www.mpe2013.org) com a una exposició relacionada dirigida per IMAGINARY (<http://imaginary.org/exhibition/mathematics-of-planet-earth>).

relacionats amb el nostre planeta on les matemàtiques han jugat un rol important. Aquests fenòmens poden ser físics, naturals, humans o de qualsevol altre tipus. La cartografia n'és un bon exemple. És una ciència que neix de la necessitat de dibuixar mapes de les regions de la Terra. Té diverses branques i blocs d'interès: un és com es mesura la Terra (Geodèsia), però també com representar la superfície corbada de la Terra en el pla, anomenades projeccions. Hi ha moltes maneres de representar l'esfera en el pla; dibuixant les coordenades, projectant línies imaginàries en plans, cilindres, cons... En tots els casos, però, hem de tenir les eines correctes per a poder analitzar objectivament les diferents projeccions, definir i mesurar les seves distorsions i avaluar la utilitat de cada mapa per a situacions reals, com buscar rutes entre punts^[5]. La cartografia i la geodèsia van suposar, històricament, el naixement del camp de la geometria diferencial. Oblidant certes limitacions físiques, hem pogut modelar un fenomen, i desenvolupant una teoria, hem aplicat l'abstracció.

La modelització també és el marc perfecte per introduir altres àrees de les matemàtiques, per exemple les equacions diferencials. Mentre que la teoria necessària per a resoldre equacions amb funcions i derivades desconegudes (totals i parcials) és un tema avançat, la idea d'una funció que determina una magnitud física i els límits i canvis que suposa en la seva representació, és altre cop intuïtiva i accessible. A les Matemàtiques del Planeta Terra n'hi ha bons exemples: el moviment del gel en un glaciar, models de vent i partícules suspeses en l'atmosfera, del mar, corrents i tsunamis...^[6].

És important destacar també que les matemàtiques aplicades i exemples de modelització representen la història a la perfecció. L'aplicació de les matemàtiques ha estat històricament determinada en els camps en què s'ha emprat. Bons exemples són la Galeria Winton al London Science Museum o les seccions de Càlcul al Musée des Arts et Métiers a Paris. Tots dos museus fan servir patrimoni històric per mostrar àrees on les matemàtiques han jugat un paper central.

4.3. Creativitat



Construccions amb el Polydron al MMACA.

Un gran problema de l'educació formal en matemàtiques és la manca de llibertat a l'hora de crear o construir quelcom utilitzant el llenguatge de les matemàtiques. Les matemàtiques es presenten com una eina per solucionar problemes predefinitos, no com una eina de creació. Tot i que les noves recerques en matemàtiques poden ser un gran procés creatiu, estan allunyades d'estudiants i públic general. És per això que és important desenvolupar eines i activitats que permetin l'expressió creativa per part de l'usuari del seu llenguatge matemàtic.

Les activitats que promouen la creativitat han de ser necessàriament obertes, no hi pot haver creativitat quan el resultat i les conclusions estan pre-

5 Veure el mòdul The Sphere of the Earth at imaginary.org

6 The Future of Glaciers, Dune Ash, i TsunaMath respectivament, a imaginary.org



GeCla, Generador i Classificador d'enrajolaments del pla, d'Atractor.



Superfícies algebraïques amb registre de singularitats amb SURFER.

definides. Mòduls basats en blocs de construcció són un espai tradicional de creativitat, especialment entre els més joves. Blocs de construcció polièdrics també són comuns als museus de matemàtiques (disponibles comercialment^[7] o fets pels mateixos usuaris). Aquests mòduls permeten moltes connexions i figures, però afegeixen restriccions geomètriques que fan la creació més elaborada. Materials grans i tous també són atractius per als nens, permeten construir ponts, torres, empaquetaments o estructures diverses.

Un altra activitat inherentment creativa és dibuixar. El software mencionat anteriorment per als enrajolaments també permet l'expressió creativa, amb la "màgia" de la multiplicació de les figures en patrons meravellosos. L'associació Atractor (Portugal) ha iniciat competicions entre escoles^[8] utilitzant el seu software GeCla (Generation and Classification) per a tessellacions planes, on cada participant ha de dibuixar patrons i endevinar el grup de simetria en els dibuixos d'altres..

SURFER^[9] és un programa interactiu, part de les exposicions d'IMAGINARY per visualitzar superfícies algebraïques, és a dir, superfícies tridimensionals definides per una equació polinòmica en les tres variables espacials x , y , z . L'usuari pot escriure o seleccionar una equació obtenint-ne la representació visual. Les possibilitats per a les equacions són infinites, però, a partir de l'entrenament i l'experimentació, l'usuari pot desenvolupar una intuïció per modificar les fórmules segons la superfície desitjada. És una eina per a transformar un llenguatge matemàtic simbòlic de manera creativa. El SURFER s'ha fet servir en competicions^[10], on els participants han de crear la imatge més maca, interessant o suggerent, avaluada pel jurat.

Finalment, el màxim exercici creatiu és convertir les matemàtiques en una forma d'art. L'art matemàtic té una enorme tradició, des de la perspectiva, el nombre d'or i la divina proporció, els mosaics àrabs, l'art de M. C. Escher, el cubisme, l'escultura geomètrica o alguns pintors contemporanis. Avui en dia, la comunitat d'artistes matemàtics és més gran que mai, amb organitzacions^[11], plataformes^[12], conferències^[13], i competicions^[14]. Per al públic i els estudiants, la connexió entre les matemàtiques i l'art és, no només una font de satisfacció estètica, sinó que reafirma la idea que les ciències i l'art no són camps oposats, sinó diferents expressions de ments creatives.

7 Com ara Polydron, Zometool, MathLink...

8 http://www.atractor.pt/mat/GeCla/Competicao_-_en.html

9 Disponible a <https://imaginary.org/program/surfer>

10 <https://imaginary.org/search/node/surfer%20competition>

11 e.g. the European Society for the Mathematics and Arts <http://www.math-art.eu/>

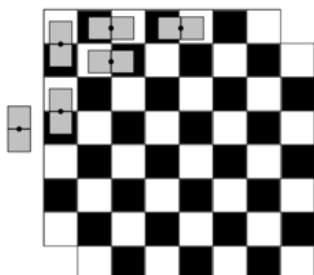
12 e.g. IMAGINARY

13 e.g. Bridges conference <http://bridgesmathart.org/>

14 e.g. Math Creations, <https://imaginary.org/project/math-creations>. Vegeu també Violet, Wagner, Eremenko "Math Creations - A math-art competition" Proceedings of the Bridges conference 2017.

4.4. Exercicis mentals

Les fires, exposicions i museus de ciències o matemàtiques tenen una clara devoció pels puzles i problemes d'enginy. Això fa d'aquestes exposicions, positivament, un espai d'entrenament del cervell per als visitants. El procés educatiu, efectivament, no s'atura en la transmissió de coneixements, també ha d'incloure l'entrenament necessari per adquirir competència. Els jocs i puzles ajuden a desenvolupar estratègies de resolució de problemes, la lògica i el raonament.



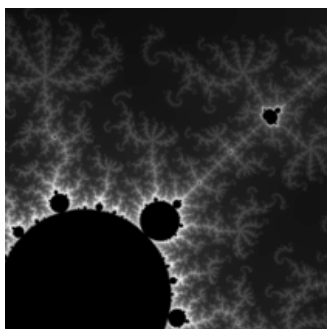
El problema dels dominos i el tauler d'escacs mutilat.

Un joc clàssic és descobrir si es pot cobrir un tauler d'escacs amb dominos i llavors demanar si seria possible fer-ho si traguéssim una casella del tauler. Això no és possible, ja que ens hem quedat amb un nombre imparell de caselles. Aleshores, podríem demanar què passaria si eliminéssim dues caselles oposades al tauler (altre cop impossible, ja que cada peça de dòmino cobreix sempre una casella blanca i una de negra, i les caselles oposades són del mateix color, deixant-nos amb un nombre diferent de caselles de cada color al tauler). En el primer cas, la solució és afirmativa, ja que podem construir la solució. En el segon cas és impossible perquè el tauler no compleix les condicions necessàries. En el tercer cas, la condició anterior es compleix, però no ho fa una altra de també necessària (el problema pot guanyar dificultat si en canvi d'un tauler d'escacs utilitzem una graella 8x8 sense colors). Per a un públic no familiaritzat amb la rigorositat matemàtica, com poden ser els infants (i molts adults), aquest problema pot suposar un repte a l'hora de raonar lògicament els resultats positius i negatius. Podríem també anar més enllà preguntant quines són les condicions suficients i necessàries per a resoldre un tauler qualsevol amb forats.

Els jocs d'enginy tenen també un lloc prominent en el diagnòstic dels coneixements dels visitants. Utilitzant aquests coneixements, els visitants poden sentir una gran satisfacció en comprovar el seu poder intel·lectual. Resoldre un puzle és apoderador. Qualsevol exposició de matemàtiques és testimoni de la immensa satisfacció que porta la resolució d'un problema; nens que corren a mostrar el puzle resolt a pares, germans i altres visitants. Aquests nens estan en poder d'un coneixement del qual se senten orgullosos, i volen transmetre'l. Un bon exemple és el famós, i difícil, cub de Rubik. Qualsevol persona que hagi resolt un cub de Rubik mereix un reconeixement, ja que la resolució del cub no és un simple truc, són necessàries una bona quantitat de temps i de destresa per a resoldre'l, aprendre els algorismes que porten a la solució, fins i tot amb una guia. Als vuitanta, quan va néixer, sense internet que ens pogués ajudar, la resolució del cub era l'objectiu últim. En els anys següents van aparèixer nous reptes, com per exemple resoldre'l en el menor temps possible. Avui en dia, amb rècords que desafien la capacitat humana, els nous reptes passen per variacions del puzle, noves estructures, nous poliedres, suposant un repte no només mental, sinó fins i tot d'enginyeria. El cub de Rubik continua sent una gran eina matemàtica que pot portar a nous horitzons d'aprenentatge i descoberta sobre teoria de grups, a desenvolupar la lògica i habilitats visuals, sense perdre les seves qualitats de joc accessible a qualsevol^[15].

15 Veure, per exemple, el canal de Mathologer a YouTube.

L'exercici mental per excel·lència és potenciar la investigació personal. No només descobrir la solució a un problema, sinó també el funcionament del problema en el seu marc i context. Aquest procés pot ser guiat per un mediador, però és essencial crear un espai amb la llibertat i el temps necessaris per a l'exploració personal. Un altre bon exemple pot ser la pissarra esfèrica^[16], una esfera on poder dibuixar i, possiblement, un compàs per poder-hi dibuixar línies “rectes” (geodèsiques). Un espai per al dibuix és una oportunitat per a la creativitat, i són moltes les figures i formes que els visitants hi poden pintar: formes geomètriques, motius florals o fins tot els països i continents de la Terra. Si es demana “és possible dibuixar-hi un quadrat?”, els visitants hauran de fer front als problemes de l'espai corbat: és possible dibuixar un quadrilàter amb costats iguals, però no amb angles iguals. Aquesta informació, naturalment, no ha de ser divulgada al començament de l'experiència, però pot ser el resultat de l'experimentació dels usuaris. És possible arribar en aquestes conclusions a través de la prova i error, també, però sempre requereix una investigació més profunda. Els problemes oberts, on hi ha infinites possibilitats, ens obliguen a ser creatius amb les estratègies que desenvolupem, i queda clar que l'experiència no acaba amb la resolució del problema. L'objectiu final no és dibuixar un quadrat. Ens hem de preguntar: és possible dibuixar un triangle? Un pentàgon? I dibuixar un políedre a l'esfera...?



Mostra de fractal de Mandelbrot.

4.5. Descobrint nous camps

Hi ha molts camps de coneixement que no són presents en l'educació formal, amb un temps limitat, cal establir prioritats i deixar quelcom enrere. Molts camps de les matemàtiques són absolutament desconeguts pel públic en general, fins i tot quan podrien ser accessibles i enriquidors. Per suposat, un curs introductori o simples nocions aïllades no són comparables a cursos específics, però poden ser introduïts de manera no formal per tal de difondre'n l'existència i despertar nous interessos. És més, sovint és fàcil trobar referències a la cultura popular que poden atreure l'atenció dels visitants i funcionar d'introducció a la presentació d'un nou concepte.

Els fractals són un d'aquests aspectes. Molts han sentit a parlar dels fractals, fins i tot poden conèixer algun conjunt de Mandelbrot o haver vist vídeos psicodèlics a internet. Aquest públic ja està motivat naturalment i és fàcil oferir-los nova informació entretinguda i plaent.

Els fractals estan lligats al concepte d'infinit, ja que per construir-los hem de fer un procés d'iteració i un pas més enllà del límit. Aquest concepte de similitud és intuïtiu i té suport en diferents fenòmens a la naturalesa, algun cop molt evidentment (els arbres, les fulles de fonoll, alguns tipus de bròquil...) i algun cop més reveladors (Quina és la longitud de la costa del Regne Unit?^[17]). La idea de límit d'un procés es pot explorar fent servir cor-

16 Existeixen pissarres convencionals esfèriques, però una versió moderna molt útil es la Lénárt Sphere (<http://lenartsphere.com/>), que és transparent.

17 Aquesta pregunta és citada de B. Mandelbrot. Vol dir que no hi ha una bona definició de llargada, ja que depèn de la nostra consideració d'unitat. Si considerem els

bes de Peano i de Hilbert (que cobreixen el pla i l'espai, respectivament) o el floc de Koch. Podem construir aproximacions finites físicament, o programar simulacions amb ordinadors i explorar-les virtualment^[18]. També podem explorar la noció de l'espai fractal o parlar dels fractals com la base del caos.

Per entendre els fractals en profunditat hem d'entendre també els nombres i dinàmiques complexes. Desgraciadament, els nombres complexos són un tema que no sempre es tracta en un context extra universitari. Tot i així, la idea d'operacions algebraiques entre punts del pla (o parelles de coordenades, equivalents a nombres complexos) és bastant accessible, fins i tot quan no es té cap fonament sobre la teoria. A partir d'aquest punt, podem introduir-nos en les variables i l'anàlisi complexa. El salt és enorme, qualitativament, i l'anàlisi complexa s'acostuma a ensenyar a segon o tercer any de carreres universitàries en matemàtiques. Tot i així, podem mirar de donar una base o una idea de tema amb el públic general. Una funció amb variable complexa (holomòrfica) és conforme, que vol dir que conserva els angles. És fàcil comprovar-ho amb software específic^[19]. Podem mostrar una imatge (estàtica o fins i tot el vídeo d'una càmera) i afegir-hi transformacions holomòrfiques, i comprovar-ne els angles. També podem observar-ne els zeros i els pols de les funcions meromorfs i jugar amb la geometria complexa. El proper pas podria ser iterar la funció (composar-la amb si mateixa un cert nombre de vegades) per obtenir conjunts de Julia o de Mandelbrot.

Aquest viatge a través de l'anàlisi complexa i els fractals requereix segurament un mediador amb l'habilitat de parar, avançar o saltar parts, però, en condicions normals, acostuma a ser una experiència viable per a un públic general o d'adolescents. El context ideal podria ser una xerrada interactiva de vint o vint-i-cinc minuts en un museu o en una activitat fora l'escola, utilitzant software específic i alguns objectes materials (una corba de Hilbert, un tros de bròquil...). També podem enfocar-ho com una xerrada més "ordinària", si el públic és massa gran, però és imprescindible que el públic pugui tocar i interactuar amb les funcions holomorfs o amb un fractal, canviant-ne els paràmetres i descobrint-ne els detalls per ells mateixos.

4.6. Perles matemàtiques

En matemàtiques hi ha innumerables exemples d'històries, teoremes, conjectures o elements d'un cert camp d'estudi que es poden explicar sense gaire context i ser fàcilment compreses. Aquestes històries, que nosaltres anomenem "perles", sempre tenen un element de sorpresa, són captivadores i tenen un gran valor en discussions casuais de matemàtiques. Aques-

detalls més i més petits, les mesures creixen fins a l'infinit, suggerint la idea de la dimensió fractal..

18 Vegeu, per exemple, alguns Applets de Cinderella (<https://imaginary.org/program/cinderella-applets>)

19 Vegeu la Conformal Webcam by Christian Mercat (https://math.univ-lyon1.fr/~mercat/CindyJS/examples/cindygl/22_webcamconf.html)

tes perles poden semblar històries aïllades però, cada cop que s'explica, la història agafa més detall, s'enriqueix de nous conceptes i es connecta amb altres que semblaven no tenir-hi cap connexió. La seva naturalesa informal les exclou de l'ensenyament formal, però són perfectes per a la divulgació i popularització de les matemàtiques.

La paradoxa Bannach-Tarski és un teorema que declara que és possible tallar una esfera en cinc peces i reformar-les en dues esferes idèntiques en tamany a la inicial. En diem paradoxa perquè sembla contraintuïtiu i contradiu la propietat additiva del volum, però, al mateix temps, és un teorema provat i absolutament cert. L'explicació té a veure amb el fet que no es pot assignar volums a tots els conjunts de punts: tot i que puguin ser definits, no són mesurables. Les peces en què s'hauria de tallar l'esfera són tan intricades que no se'ls pot assignar volum. I, encara més important, aquesta història és fàcil d'explicar i pot despertar en el públic l'autoritat de la frase "veritat matemàtica", meravellant i, esperem, encenent una guspira de curiositat i ganes d'entendre el teorema en profunditat ^[20].

Una altra perla pot ser la suma de nombres naturals. El resultat determina que la suma d' $1+2+3+4+5+\dots = -1/12$. Aquesta afirmació és com a mínim inesperada i la majoria de persones es negarà a acceptar-la. Però ens trobem, de nou, amb una veritat matemàtica. L'explicació és que la suma només es pot definir per un, dos, tres o qualsevol nombre finit de sumands. Si volem fer sumes infinites, hem d'estendre el significat de la suma, de manera que es pugui expressar, per exemple, que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$. Aquesta última sèrie és la paradoxa de Zenó, que va meravellar els grecs i tota la humanitat durant segles, però és generalment acceptada avui en dia i s'utilitza en moltes àrees de les matemàtiques. Es basa en la distinció entre sèries convergents i divergents: les primeres admeten un valor numèric, mentre que les segones no. En altres camps, com el de la teoria de cordes en física, també podem trobar-nos amb la necessitat d'assignar un valor numèric a una sèrie que considerem divergent, com pot ser la suma dels nombres naturals; i, en aquest cas, el resultat coherent és $-1/12$. Aquesta història demostra que un pot superar les normes i posar les teories a prova. Conceptes que normalment descartaríem o considerem impossibles han de ser reexaminats ^[21].

Hi ha moltes d'aquestes perles que es poden fer servir per sorprendre o intrigar el públic. Sovint, l'espai per a aquestes perles eren els articles o llibres curts de popularització matemàtica. En aquests últims anys també ha començat a aparèixer un nou format en el món de la divulgació matemàtica arran del fenomen Internet, els vídeos de popularització matemàtica a pàgines com YouTube. El format relativament curt (sovint de menys de 15 minuts) i informal dels vídeos els fa propers i una gran eina per als nous di-

20 See for instance the video from Vsauce (<https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA>)

21 See videos from Numberphile (<https://www.youtube.com/watch?v=w-l6XTVZX-ww>, <https://www.youtube.com/watch?v=0Oazb7IWzbA&t=36s>), from Mathologer (<https://www.youtube.com/watch?v=jcKRGpMiVTw>) or from 3brown1blue (<https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqIYw&t=8s>).

vulgadors matemàtics. Els temes poden variar o poden ser reformulats per diversos autors i punts de vista, poden demanar “resposta”, expressar-se en diferents llengües i per a públics diferents. Per suposat, les barreres lingüístiques i geogràfiques continuen, però són més fàcilment abastables per les noves generacions. El format audiovisual també permet introduir-hi animacions, diagrames, que representen una clara millora sobre els textos i les fotos impreses, i l'accés a software específic d'edició i gravació ha permès que la tècnica dels autors i editors sigui comparable a la de produccions de televisió, sense restriccions de temps ni de format.

La comunicació matemàtica en formats tan reduïts, ja siguin vídeos o articles tradicionals, és un gran repte per a la didàctica. A més del temps, també s'han de tenir en compte els diferents rerefons del públic, portant-nos al límit de la síntesi havent d'emprar tots els recursos possibles per a ser entesos i mantenir l'atenció de l'usuari.

Aquestes perles poden ser la millor introducció a molts temes, barrejant interès matemàtic i entreteniment. Aquest, i molts aspectes, en fan una eina educativa molt potent, que hauria de ser explotada per professors i educadors matemàtics.

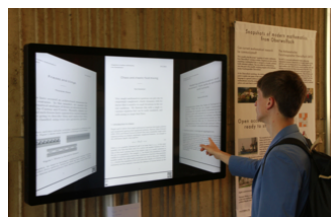
4.7. Al límit del coneixement

Les matemàtiques no són una ciència finita. Hi ha i sempre hi haurà preguntes encara sense resposta, problemes irresolts, camps sencers d'estudi per descobrir. En el cas de les matemàtiques, pot resultar difícil observar-ne el progrés, ja que no és tan aparent com el de les tecnologies (comunicació, recerca mèdica...) ni és tant fàcil de transmetre com alguns objectius físics (el descobriment d'una nova partícula emprant un accelerador, amb l'objectiu d'entendre millor la matèria). Sovint s'ha considerat que, en les matemàtiques, la divulgació o comunicació d'avenços és un esforç inútil. Però no només és el deure exprés dels recercadors comunicar i publicar els seus avenços a la comunitat científica, sinó a la comunitat sencera dels no-especialistes. Per sort, aquesta tendència ha canviat a la última dècada amb projectes nous arreu del món, i tant els recercadors mateixos com altres xarxes i grups de comunicadors busquen la connexió entre recerca i públic.



SURFER en una exposició

El Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach és un centre de recerca a Alemanya on, el 2018, es va decidir iniciar un projecte de comunicació matemàtica que, més tard, esdevindria la organització IMAGINARY. Molts dels materials d'IMAGINARY són produïts per matemàtics professionals, que busquen popularitzar i visibilitzar els seus estudis. Un d'aquests materials és el programari SURFER, que renderitza superfícies algebraïques. A més de permetre explorar superfícies creades per l'usuari, el programa ofereix un tour a la teoria de singularitats. Les singularitats són punts de desordre – pics o valls – en una superfície algebraica llisa. Pot ser difícil individuar aquests punts, i d'aquí apareix el camp d'estudi. Amb polinomis de poc grau (fins a grau 6), podem emprar teoremes que busquen el màxim nombre de singularitats per una superfície d'un cert grau. SURFER ens



“Snapshots of current mathematics”, exposat com a mòdul interactiu a una exposició.

permet explorar aquestes superfícies que porten el nom dels matemàtics que les van descobrir, sovint recentment. Per a graus més alts (7 i més), encara no existeix un mètode d'identificació del nombre màxim de singularitats. Aquest és un problema real i obert; és clar que necessitarem més que SURFER per descobrir aquest nou teorema, però potser aquest programa pot donar una idea de com seran aquests teoremes, i despertar la imaginació d'aquell que escriu el polinomi amb el nombre més gran de singularitats.

Un altre projecte amb el mateix Institut, “Snapshots of current mathematics from Oberwolfach” ^[22], reproduïx llibrets per al públic general sobre temes que es discuteixen als seminaris d'Oberwolfach. Són llibrets de 8-10 pàgines en format A5 i es poden imprimir i distribuir lliurement a qualsevol event matemàtic o traduir i re-publicar en diaris de divulgació.

Un bon punt de trobada per als comunicadors matemàtics poden ser plataformes on-line com la d'*Images des Maths* ^[23] També s'hi inclouen pel·lícules i vídeos, no només de curt format, sinó també llargmetratges com *Dimensions* or *Chaos* ^[24] que poden servir d'introducció a molts espais de recerca actuals.

La comunicació matemàtica ja fa temps que ha passat de ser un camp emergent a un domini consolidat. Més de 50 museus arreu del món ^[25], dotzenes de conferències ^[26], i una comunitat més i més gran cada dia ho defensen. IMAGINARY promou i proveeix servei a la comunitat (WikiMathCom ^[27], Math Communication Network ^[28], IMAGINARY Conferences ^[29]) i ha iniciat iniciatives independents amb el suport de diverses institucions (CNRS, MSRI...) per encoratjar la difusió de les matemàtiques al públic general, amb publicacions, programari lliure (com la competició Matemàtiques del Planeta Terra) i panells específics a les conferències sobre matemàtiques ^[30].

El paper de la comunicació de les matemàtiques com a mètode d'aprenentatge no formal, i la connexió amb la comunitat formal de les universitats i escoles és un aspecte a continuar desenvolupant, buscant la sinèrgia entre les dues cares d'una mateixa moneda, per aconseguir una millor educació i una societat més competent.

-
- 22 Textos a <https://imaginary.org/snapshots>, també una secció de l'exposició itinerant <https://imaginary.org/program/snapshots-slider>
 - 23 <http://images.math.cnrs.fr/?lang=fr>
 - 24 Ambdós de E. Ghys, J. Leys and A. Alvarez <http://www.dimensions-math.org/>, <http://www.chaos-math.org/es>
 - 25 http://www.mathcom.wiki/index.php?title=Math_Museums
 - 26 <http://www.mathcom.wiki/index.php?title=Conferences>
 - 27 <http://www.mathcom.wiki>
 - 28 <http://imaginary.org/network>
 - 29 <http://ic16.imaginary.org/>
 - 30 Per exemple a l'International Congress of Mathematicians ICM (Seoul 2014), <https://imaginary.org/event/imaginary-panel-mathematics-communication-for-the-future-a-vision-slam> or at the 7th European Congress of Mathematics 7ECM (Berlin 2016) <https://imaginary.org/event/ems-session-on-public-awareness-of-mathematics-at-7ecm>

5 Un mètode inclusiu

Contrastant amb la idea del museu com a lloc de conservació, neix, en molts llocs, una nova idea de museu. Una visió de museu com a paradís cultural, inclusiu, viu, com a punt de trobada obert a l'intercanvi d'experiències. Això vol dir que l'accessibilitat a un públic divers ha de prendre un rol prominent.

Per a poder promoure l'accessibilitat al museu, hem d'identificar quines són les barreres que dificulten al públic, o fraccions del públic, de gaudir completament de les experiències del museu i treballar per eliminar-les.

Aquesta visió és particularment pertinent en relació als museus interactius de ciència, que depenen, per pròpia naturalesa, de la participació activa del públic. El nostre objectiu ha de ser el de transmetre conceptes que tradicionalment requeririen entrenament o llenguatge específic a un públic tan ampli com sigui possible; poder-los comunicar efectivament és part d'aquest objectiu.

Un museu com el Giardino di Archimede, que busca, des dels orígens, disseminar i comunicar les matemàtiques en totes les seves formes i interdisciplinarietat, tant dins com fora el museu i arreu del territori, té una connotació inclusiva per naturalesa.

Hem de considerar el concepte de barrera en el seu sentit més ampli: qualsevol aspecte que pugui causar l'exclusió de qualsevol públic específic. Podem considerar diversos factors, materials o no. Aquestes barreres es poden superar, i porten a identificar i comprendre millor col·lectius per als quals el museu ha estat limitat. Els principals elements de marginació al museu estan relacionats amb limitacions físiques o socio-econòmiques. El primer grup inclou persones amb problemes de vista o oïda, minusvàlues o la gent gran. En el segon podem trobar minories ètniques amb problemes d'integració, presos, infants d'acollida o nous immigrants. L'objectiu final del museu és el d'obrir-se a un públic tan nou i divers com sigui possible.

La integració i col·laboració entre diverses àrees de l'educació no formal permet un salt en qualitat i efectivitat en les propostes. El projecte anglès "Learning outside Classroom"^[1] n'és un exemple interessant. Tristament, i com passa més sovint del que voldríem, el projecte va ser sacrificat per raons econòmiques abans de ser significativament implementat.

Hi ha dues experiències del Giardino di Archimede que es mouen en la mateixa línia; són bons exemples de bones pràctiques que podrien ser implementats, fins i tot de manera parcial, en molts països i contextos diferents.

El primer projecte amb l'objectiu de buscar bones pràctiques inclusives va

1 <https://www.gov.uk/government/publications/learning-outside-the-classroom>
<http://www.lotc.org.uk/wp-content/uploads/2011/03/G1.-LOtC-Manifesto.pdf>



Activitats del projecte WELCOME al Giardino di Archimede.

ser implementat el 2015. Comprenia una xarxa de museus locals, que més tard esdevindria un segon projecte, anomenat WELCOME (We Encourage Living Collective Open Museums Experiences).

Tots dos projectes van néixer arran d'un grup de treball del territori de la ciutat de Florència. Aquest grup incloïa institucions diverses i heterogènies en tipus i temàtica; públiques i privades. El grup es va formar com a resposta a una sèrie d'iniciatives promogudes per la Regione Toscana. Independentment de les diferències, els objectius eren comuns i tenien en compte diversitat i necessitats personals. El grup es va acabar constituint en una xarxa anomenada "ArteStoriaScienza - Sistema Coordinato di Musei con Attività di Cooperazione" ^[2].

El primer projecte realitzat per la Xarxa va ser el MuseoBus, mirant de facilitar la inserció dels museus com a part viva del teixit de la ciutat. Buscava un públic que, per raons físiques, veu impossible arribar autònomament al museu. Es van crear una sèrie d'itineraris temàtics, connectats amb alguns dels museus o realitat social local ^[3]. La connexió era tant temàtica com física; un autobús portava els visitants d'un punt de l'itinerari al següent. Aquesta primera versió del projecte cercava, doncs, un públic que ja tenia un interès cultural, oferint-los la possibilitat d'obrir els seus interessos.

Els diferents itineraris que va organitzar el Giardino di Archimede van ser:

INSTITUCIÓ EXTERNA	INSTITUCIÓ MATEMÀTICA	VINCLE TEMÀTIC
Central de la llet	Giardino di Archimede	La geometria de l'empaquetament
Istituto Nazionale di Ottica	Giardino di Archimede	Formes geomètriques connectades a la reflexió de la llum.
Museu de Ciències	Giardino di Archimede	Geometria i bombolles de sabó
Departament de matemàtiques i ciències informàtiques.	Giardino di Archimede	Liber Abaci i el sistema de numeració Indo-àrab

Entre els altres itineraris connectats a altres museus hi havia la visita a una forja, un molí tèxtil, un taller de ceràmica, una torrefacció de cafè, una fàbrica de cristall, un viver històric i la companyia d'enllumenat públic; tots ells connectats a un museu específic.

Es van organitzar viatges i activitats específiques per a determinats grups que, per diverses raons, no tenien la possibilitat o la iniciativa de visitar els museus. Entre aquest grups hi havia joves d'un centre de menors dels afores de Florència, altres d'una comunitat de l'àrea metropolitana de Roma,

2 Els membres d'aquesta xarxa són els vuit museus de Florència: Fondazione Casa Buonarroti, FirST-Firenze Fondazione Scienza e Tecnica, Museo Galileo, Museo di Storia Naturale dell'Università di Firenze, Museo Fiorentino di Preistoria "P. Gazi-osi", Museo Marino Marini, Il Giardino di Archimede—Un Museo per la Matematica, Museo Horne.

3 Aquest projecte ja havia estat iniciat per altres museus de la regió. El Giardino di Archimede hi entra el 2016. Aquest projecte va ser cofinançat per la Regione Toscana.

centres de gent gran, de rehabilitació i centres de discapacitats visuals i auditives.

Aquestes primeres experiències positives van encoratjar els membres a desenvolupar un segon projecte WELCOME, que va rebre finançament públic al 2016, amb un gran impacte en l'objectiu d'obrir els museus com a espai de forta inclusió, integració i accessibilitat a la cultura. Es va especialitzar en la creació d'itineraris dedicats, escollint nous temes, estratègies i materials a les visites i activitats educatives.

Algunes de les activitats del Projecte ^[4]

Tipus de desavantatge	Gent gran, minusvàlids, immigrants, infants d'acollida, pacients d'hospital, minusvàlues físiques o mentals específiques (problemes de vista o oïda, pacients amb autisme o Alzheimer)
Accions al museu	Visites ad hoc, transport gratuït, disseny i creació de material específic.
Accions fora del museu	Trobades preliminars per a la preparació de les visites, tallers i activitats a les estructures d'acollida.

Per a poder identificar efectivament les necessitat de cada grup i poder organitzar les activitats a consciència, s'hi va incloure diferents estructures ja existents, per a obtenir-ne una visió informada. Es van establir col·laboracions amb institucions públiques i voluntaris dedicats a diferents tipus de tasques socials, tant amb menors com amb gent gran, immigrants, societats excloses socialment, discapacitats (començant una col·laboració amb l'hospital pediàtric) i presos ^[5].

Per a una bona estratègia inclusiva, es van adaptar les propostes del museu al nou públic. Un punt crucial va ser escollir amb l'ajuda d'experts, els continguts i modalitats per a ser tan interessants i comunicatius com fos possible, i quins recursos utilitzar per a fer-los accessibles.

4 Aquest projecte va ser entregat pel Dr. Cioppi del Museo di Storia Naturale at the 26th Congress ANMS-Associazione Nazionale Musei Scientifici (Trieste, 16-18 de Novembre de 2016) en forma de comunicació i poster a la manifestació Facciamoci Vedere (Milano, desembre 13 – 15, 2016). També hi ha una pàgina web del projecte (<https://welcome-musei-firenze.blogspot.it/>), amb links als altres museus.

5 Llista de les institucions involucrades en el projecte: Associazione Anelli Mancanti, Associazione FuoriMercato, Associazione Interculturale Messaggeri di Pace, Associazione Oltre, Caritas - progetto Rom, Casa circondariale di Volterra, Casa circondariale Mario Gozzini, Centri Educativi Gould e Ferretti, Centro Anziani diurno I Tigli, Centro anziani Villa Bracci, Centro di Solidarietà Anconella, Chini Lab, Comunità per minori P. Annibale M. Di Francia, Comunità di Sant'Egidio di Firenze, Cooperativa Il Mandorlo, Cooperativa sociale Le Rose, Cooperativa sociale Matrix onlus, Guidi Raggi RSA, La Cupolina RSA, Le Magnolie RSA, Montedomini RSA, Opera Madonnina del Grappa, Ospedale pediatrico Meyer, Progetto Villa Lorenzi, Residenza Villa Canova, Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti, Villa Michelangelo RSA.

USUARIS	ACTIVITATS	TEMÀTICA
Infants d'acollida, comunitat gitana	Poques diferències	La possibilitat d'una experiència diferent: el museu.
Adolescents en cases d'acollida	Inserció als dies de portes obertes entre el públic general.	Treballar amb altra gent de la seva edat: origami
Menors en risc d'exclusió	Col·laboracions en els centres de dia.	Materials específics
Pacients en rehabilitació	Col·laboracions en les activitats dels centres	
Presos		
Grups migratoris	Visites guiades	Connexions interculturals.
Pacients amb minusvàlues mentals	Activitats en grups petits	Personalització d'activitats
Pacients d'Alzheimer	Activitats adaptades	Estímul i reinserció social.
Gent gran		
Minusvàlids		
Pacients de l'Hospital Pediàtric.	Activitats al centre	

Entre els grups a què s'adreçava el projecte WELCOME, n'hi havia dos de particularment importants: els discapacitats auditius i visuals. Això es deu, en gran part, a la inclusió dels experts interessats precisament en el disseny d'accions i iniciatives dedicades a la seva inclusió. A més de ser els usuaris finals d'aquestes propostes específiques, també van ser coprotagonistes importants en el disseny d'aquestes propostes.

L'ajuda de la *Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti* va ser fonamental a l'hora de projectar i dissenyar recursos dedicats, com subtítols i guies en Braille, textos i figures per a fer alguns dels itineraris dels museus accessibles als discapacitats visuals.



En el cas d'alguns museus, com el Giardino di Archimede, alguns continguts ja eren disponibles a l'exploració tàtil. L'itinerari dedicat al Teorema de Pitàgores, per exemple, comprèn puzles de fusta que són perfectament aptes per a aquests usuaris. Les instruccions i continguts escrits es van traduir al Braille, per a assolir autonomia completa, amb o sense ajuda per part dels facilitadors. Per ara, només una part dels itineraris és apta per a discapacitats visuals sense la necessitat d'acompanyants.



Activitats i exposicions del Giardino di Archimede.

Algunes intervencions poden ajudar a accedir a parts de les exposicions, com per exemple la impressió 3D de diferents objectes geomètrics per a l'exploració tàtil. La contribució de la *Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti* va ser essencial en les proves i resultats finals d'aquests recursos, algunes propietats dels quals, com la textura al tacte, el tamany o el pes pot fer-ne difícil la interpretació. La seva contribució més important, en termes generals, va ser la possibilitat de comprendre com utilitzar aquests recursos millor, fossin vells o nous. Aquests materials funcionen molt millor si els educadors involucrats poden comprendre i compartir l'experiència del visitant.

Alguns recursos, com les impressions 3D, poden tenir múltiples funcions: són útils per als discapacitats visuals, però també poden ser una invitació a l'exploració tàctil per part de qualsevol visitant, poden reforçar la imaginació geomètrica i espacial, poden convertir-se fins i tot en mòduls d'exposició fora del museu físic.

Per a poder promoure l'accessibilitat als discapacitats auditius, es va obrir una col·laboració amb un intèrpret de llengua de signes.

Alguns museus van implementar visites al museu amb la presència de l'intèrpret. També es van produir diverses presentacions en vídeo ^[6] dels diferents museus pensades per als discapacitats auditius, amb subtítols i la traducció en LS. Aquests vídeos es van produir amb l'ajuda d'un intèrpret i d'un operador vídeo sord, que aportava la perspectiva d'un participant.

Altres recursos incloïen guies audiovisuals. De nou, amb la idea d'oferir una eina disponible i útil per al major nombre de persones. La presència tant d'àudio com de vídeo, en permet l'ús per part de tots dos grups. Per tal de superar la barrera lingüística, també en volem fer traduccions disponibles en diverses llengües. Els plans futurs del projecte WELCOME són d'afrontar barreres socio-lingüístiques, adreçant-se a minories amb dificultats integrant-se en l'escena cultural local.

El projecte també preveu formació específica per al personal dels museus, mirant de millorar el tracte als públics amb necessitats especials. Aquests cursos van ser especialment importants, considerant els objectius específics del projecte, en el desenvolupament d'activitats per a les persones amb minusvàlues físiques, mentals i socials.

Per a poder avaluar l'efectivitat del projecte, es va comissionar un estudi amb entrevistes i qüestionaris als participants. La cooperació entre diferents tipus de museus, amb forts punts de contacte entre metodologies didàctiques, educadors i gestió, va resultar un èxit per al projecte. Tots i cada un dels museus membres del projecte van tenir, des del principi, una base sòlida per a treballar, permetent experimentar el material amb la col·laboració de diferents públics.

En general, la resposta dels visitants que van participar en el projecte WELCOME va ser molt positiva, tant en reacció amb el personal del museu (recepció, capacitat de guiar i competència tant en els temes com en la seva comunicació) i els museus mateixos, que van considerar estimulants tant en contingut com en interacció. Un punt d'interès comú entre els comentaris dels visitants tenia a veure amb la novetat: descobrir quelcom de nou, mai vist ni sentit, encara no après, nous conceptes o nocions. Aquest punt era comú en els comentaris de tots tipus de públic. La novetat és sovint la gran raó que motiva l'entusiasme: una experiència al museu vol dir aprendre coses noves.

6 <https://welcome-musei-firenze.blogspot.com/es/p/sussidi-per-disabili-sensoriali.html>

Altres museus amb una naturalesa profundament manipulativa, com el Museu de Matemàtiques de Catalunya, han viscut experiències similars amb grups de minusvàlids visuals i auditius, gent gran o grups d'infants en perill d'exclusió. La seva impressió coincideix amb la de l'experiència del Giardino di Archimede. La naturalesa accessible dels seus materials i la facilitat per a adaptar-los els fa intrínsecament inclusius.

La creació de xarxes d'institucions permet la complicitat entre llengües específiques, augmenta la capil·laritat de la intervenció i multiplica el seu valor qualitativament i quantitativament.

La nostra esperança és que futures implementacions i desenvolupaments coherents amb projectes com el WELCOME puguin transformar, en el futur proper, una visita a un museu en una experiència on tots s'hi sentin protagonistes.

6 Un qüestionari per recollir les impressions dels nostres usuaris.

6.1. Anàlisi de les dades

Els qüestionaris que hem distribuït a les nostres exposicions, tot i que tenen un valor diagnòstic, no tenen significació per si sols. Han estat distribuïts per avaluar les nostres forces i els nostres punts febles, per tal d'elaborar un model d'avaluació interna que pugui ser aplicat més extensivament per poder aconseguir més dades.

Som conscients que un qüestionari no és suficient per avaluar completament l'experiència, a més, les dimensions de la mostra no són suficientment grans com per permetre una anàlisi significativa.

La diversitat de propostes dels membres del projecte també ha de ser considerada.

Per ara, ens limitarem a impressions generals, que permetin iniciar una reflexió necessària per al disseny de l'exposició Mathspaces però que, certament, no dictaran una conclusió o unes normes.

IDENTIFICACIÓ
En/Na:
☐ Noi

☐ Noia

EVALUACIÓ	No m'agrada	No ho sé	Sí	M'agrada!
Abans de la visita...				
M'agraden les mates	☐	☐	☐	☐
M'agraden el jocs	☐	☐	☐	☐
M'agraden les noves experiències	☐	☐	☐	☐
M'agrada l'escola	☐	☐	☐	☐
L'experiència ha estat				
Divertida	☐	☐	☐	☐
Interessant	☐	☐	☐	☐
Fàcil	☐	☐	☐	☐
Difícil	☐	☐	☐	☐
Diferent / Nova	☐	☐	☐	☐
Curta	☐	☐	☐	☐
Intensa	☐	☐	☐	☐
Una pèrdua de temps	☐	☐	☐	☐
El monitor ha estat				
Amistós	☐	☐	☐	☐
Dur	☐	☐	☐	☐
Distant	☐	☐	☐	☐
Quina activitat t'ha agradat més?				

DESPRÉS DE LA VISITA

He trobat el que esperava

☐ Sí

☐ No

Ara m'agraden més les mates

☐ Sí

☐ No

M'agradaria tornar a aquest museu

☐ Sí

☐ No

Recomanaré aquest museu als meus amics

☐ Sí

☐ No

IDENTIFICACIÓ					
Sóc:			☐ Noi		☐ Noia
☐ 9-10 anys	☐ 11-12 anys	☐ 13-14 anys	☐ 15-18 anys	☐ > 18 anys	
Vinc de... ..					

AVALUACIÓ	0 = totalment desacord, 1 = parcialment desacord, 2 = d'acord, 3 = totalment d'acord
------------------	--

Avalua la teva motivació prèvia				
M'agraden les mates	0	1	2	3
M'agraden el jocs	0	1	2	3
M'agraden les noves experiències	0	1	2	3
M'agrada l'escola	0	1	2	3

L'experiència ha estat				
Divertida	0	1	2	3
Interessant	0	1	2	3
Satisfactòria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3

Avalua la dinàmica				
Amistosa	0	1	2	3
Animada	0	1	2	3
Col·laborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Avalua el dinamitzador	0	1	2	3

Recorda... 0 = totalment desacord, 1 = parcialment desacord, 2 = d'acord, 3 = totalment d'acord				
L'activitat ha estat				
Fàcil	0	1	2	3
Estimulant	0	1	2	3
Diferent / Nova	0	1	2	3
Curta	0	1	2	3
Intensa	0	1	2	3
Suficient	0	1	2	3
Excessiva	0	1	2	3
Una pèrdua de temps	0	1	2	3

Quina activitat/àrea t'ha agradat més?

Quina activitat/àrea t'ha agradat menys?

DESPRÉS DE LA VISITA

He trobat el que esperava

☐ Sí☐ No

Crec que la meva visió de les matemàtiques ha evolucionat

☐ Sí☐ No

M'agradaria tornar a aquest museu

☐ Sí☐ No

Recomanaré aquest museu a la meva família/amics

☐ Sí☐ No**COMENTARIS**

IDENTIFICACIÓ				
Gènere:		Primera vegada que vens		
☐ Home ☐ Dona		☐ Sí ☐ No		
Grup de d'edat				
☐ < 19 ☐ 20-29		☐ 30-39 ☐ 40-49		☐ 50-59 ☐ > 60
Els últims estudis que he cursat...				
☐ per sota de secundària ☐ Batxillerat ☐ Màster		☐ Secundària ☐ Graduat / Llicenciat ☐ Doctorat		
La millor descripció per l'organització on treballa és...				
☐ Lucrativa ☐ No Lucrativa		☐ Governamental ☐ Educació		☐ Sanitat ☐ Altres

AVALUACIÓ 0 = totalment desacord, 1 = parcialment desacord, 2 = d'acord, 3 = totalment d'acord				
Avalua la teva motivació prèvia				
M'agraden les matemàtiques	0	1	2	3
M'agraden les noves experiències	0	1	2	3
M'agraden els museus/espais de ciència/exhibicions	0	1	2	3
M'agrada oferir a la família/amics noves experiències	0	1	2	3
Avalua el temps				
Curt	0	1	2	3
Intens	0	1	2	3
Excessiu	0	1	2	3
Suficient	0	1	2	3

Avalua l'experiència				
Divertida	0	1	2	3
Interessant	0	1	2	3
Satisfactòria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3
Diferent/Nova	0	1	2	3
Fàcil	0	1	2	3
Estimulant	0	1	2	3
Desafiant	0	1	2	3
Una pèrdua de temps	0	1	2	3

Avalua la dinàmica				
Amistosa	0	1	2	3
Animada	0	1	2	3
Col·laborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Qualifica la tasca del dinamitzador	0	1	2	3

CONCLUSIÓ

He trobat el que esperava	☐ Sí	☐ No
Penso que la visió de les matemàtiques ha evolucionat després de la visita	☐ Sí	☐ No
M'agradaria tornar a aquest museu	☐ Sí	☐ No
Ho recomanaré a la família/amics	☐ Sí	☐ No

COMENTARIS

Qüestionari avaluació professorat

IDENTIFICACIÓ	
Gènere:	Primer contacte
☐ Home ☐ Dona	☐ Sí ☐ No
Titulació en...	
☐ Matemàtiques ☐ Ciències ☐	
Estic ensenyant	
☐ Primària ☐ Secundària ☐	
☐ menors de 8 ☐ 9-13 ☐ 14-16 ☐ 17-18 ☐ Més de 18	
Quina assignatura	
☐ Matemàtiques ☐ Ciències ☐	
Vinc de	
.....	

AVALUACIÓ	0 = totalment en desacord, 1 = parcialment en desacord, 2 = d'acord, 3 = totalment d'acord			
Avalueu les vostres motivacions anteriors				
M'encanta la matemàtica	0	1	2	3
M'encanten els jocs	0	1	2	3
M'encanten les noves experiències	0	1	2	3
M'encanten els museus	0	1	2	3
Avalueu la durada				
Curta	0	1	2	3
Intensa	0	1	2	3
Excessiva	0	1	2	3
Suficient	0	1	2	3

Avalueu l'experiència				
Divertida	0	1	2	3
Interessant	0	1	2	3
Satisfactòria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3
Fàcil	0	1	2	3
Estimulant	0	1	2	3
Desafiant	0	1	2	3
Diferent / Nova	0	1	2	3
Una pèrdua de temps	0	1	2	3

Avalueu la dinàmica				
Amable	0	1	2	3
Alegre	0	1	2	3
Col·laborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Qualitat del treball de l'educador	0	1	2	3
Quina activitat/àrea prefereixes?				
Quina activitat/àrea t'ha agradat menys?				

CONCLUSIÓ

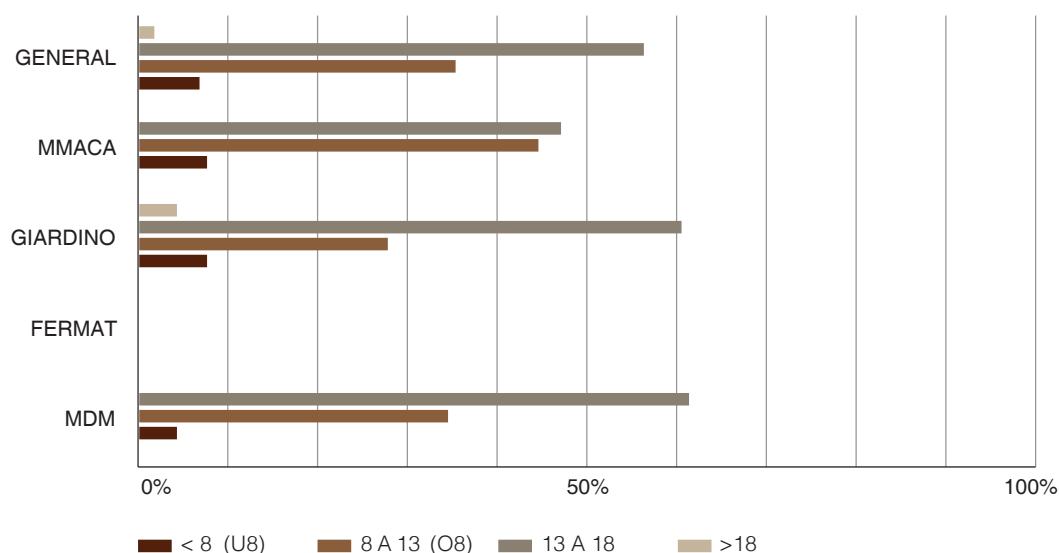
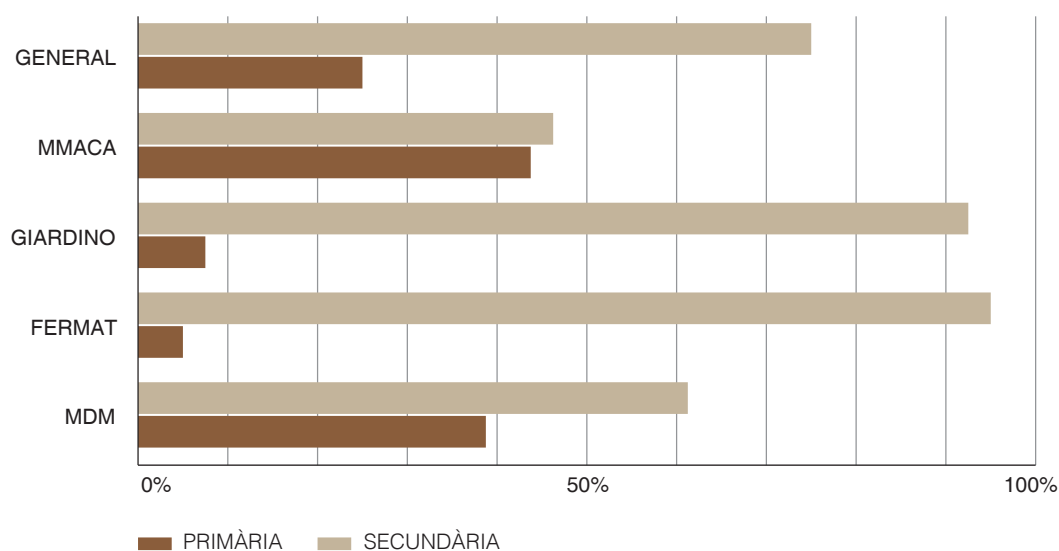
He trobat el que esperava	☐ Sí	☐ No
La visió dels meus alumnes sobre la matemàtica ha evolucionat	☐ Sí	☐ No
M'agradaria tornar a aquest museu	☐ Sí	☐ No
Ho recomanaré als meus amics/família	☐ Sí	☐ No

COMENTARIS

6.1.1. La composició de la mostra

Hem considerat quatre grups d'usuaris: públic general, professors i dos grups d'estudiants; majors i menors de 8 anys (U8 i O8), considerant que aquesta edat marca un canvi significatiu en la conceptualització de les matemàtiques.

Per suposat podríem considerar altres moments clau: la introducció de l'àlgebra (12-13 anys), el càlcul diferencial (15-16), que són, sens dubte, canvis cognitius significatius, però que potser tenen efectes menors en la proposta dels museus.



6.1.2. 2) Avaluació dels estudiants de l'experiència al museu:

Grup <8: Consideren l'experiència divertida (2 de 3), interessant (2.4) i nova/diferent (1.75), amb alguna discrepància local.

No la consideren gaire fàcil (1.5) i certament no la consideren una pèrdua de temps (0.25).

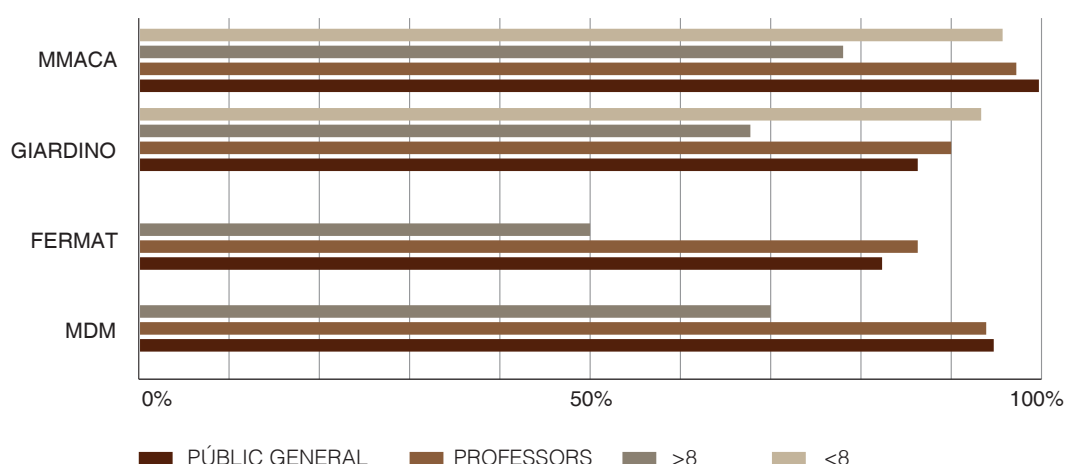
Grup >8: la majoria de les respostes superen el 1.8 (de 3); de manera que consideren l'experiència divertida, interessant, satisfactòria, educativa, estimulante i nova/diferent al mateix temps. No la consideren tan fàcil (1.75) i certament no és una pèrdua de temps (0.5).



6.1.3. “Hi tornaries?”

Grup <8: Tenim poques dades al respecte, però molt indicatives: el 90% dels qüestionats expressen el seu desig de tornar al museu! És una resposta similar a la dels grups d'adults, demostrant que la vocació educativa de la proposta no limita l'oferta al públic escolar.

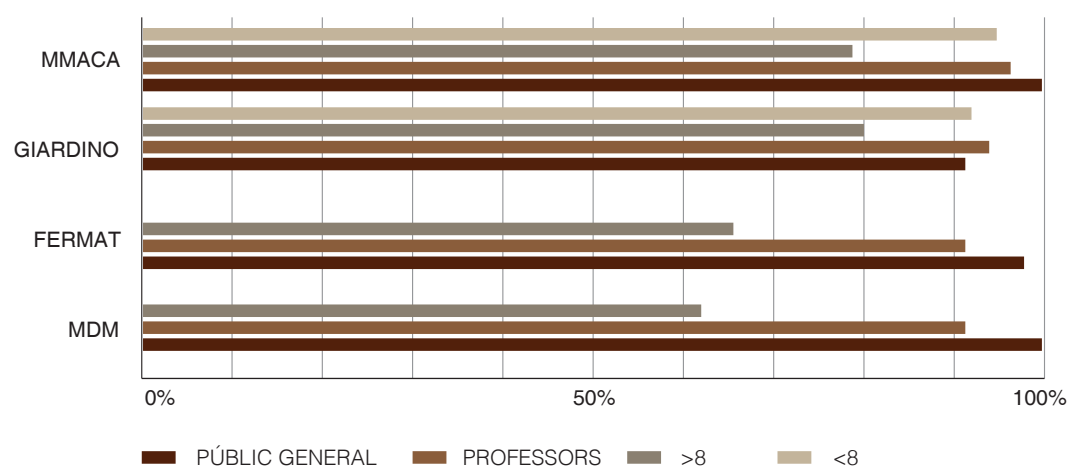
Grup >8: Les respostes locals varien des del 50 al 80%. Aquestes variacions demanen molta cautela a l'hora de treure conclusions, i una atenció i anàlisi interna de cada institució. Aquest grup és molt complex i inclou edats que donen respostes molt diferents, tradicionalment, a l'oferta dels museus. Des de l'entusiasme de la primera adolescència a la rebel·lió dels setze.



6.1.3. “Recomanaria l'experiència”

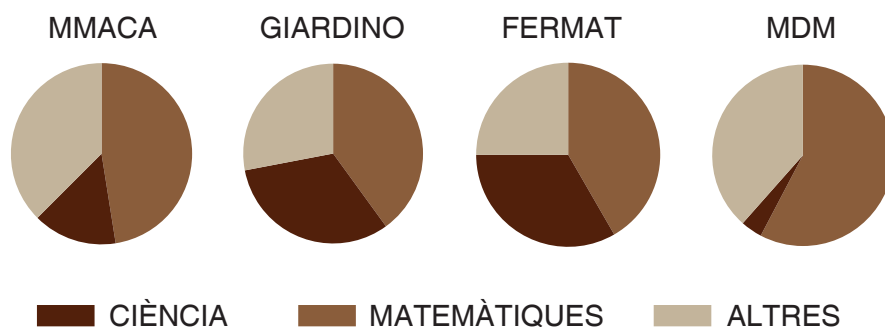
Grup <8: De nou, en tenim poques dades, però molt indicatives: el 98% dels qüestionats expressen que recomanarien una visita al nostre museu, de nou, d'acord amb el públic adult.

Grup >8: La resposta no és tan entusiasta (i més variada), però un 70% dels qüestionats recomanarien una visita a les nostres instal·lacions.

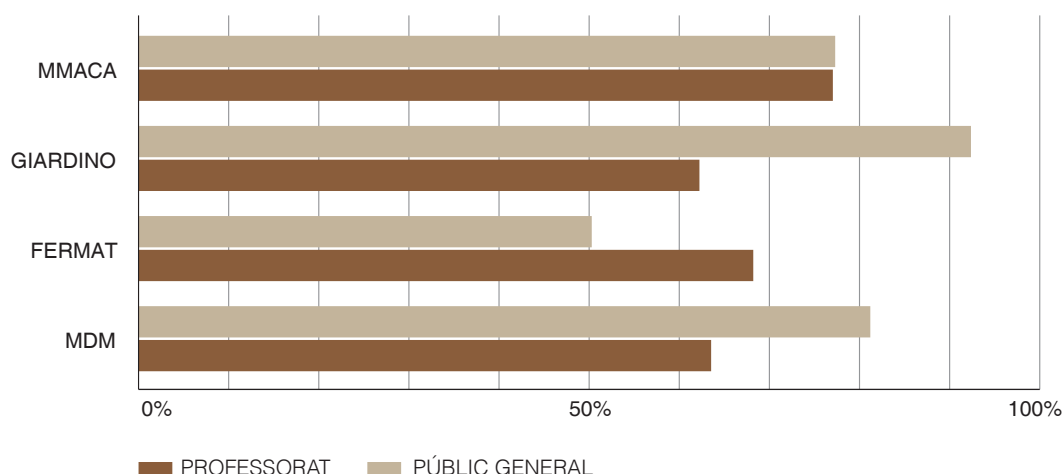


6.2. Quins professors venen a les nostres exposicions?

Com esperàvem veure, els professors de matemàtiques representen gairebé la meitat dels que acompanyen els alumnes a les visites, tot i que la majoria són professors i mestres d'altres disciplines.



La major part dels professors ens visitaven per la primera vegada (entre el 50 i el 90%).

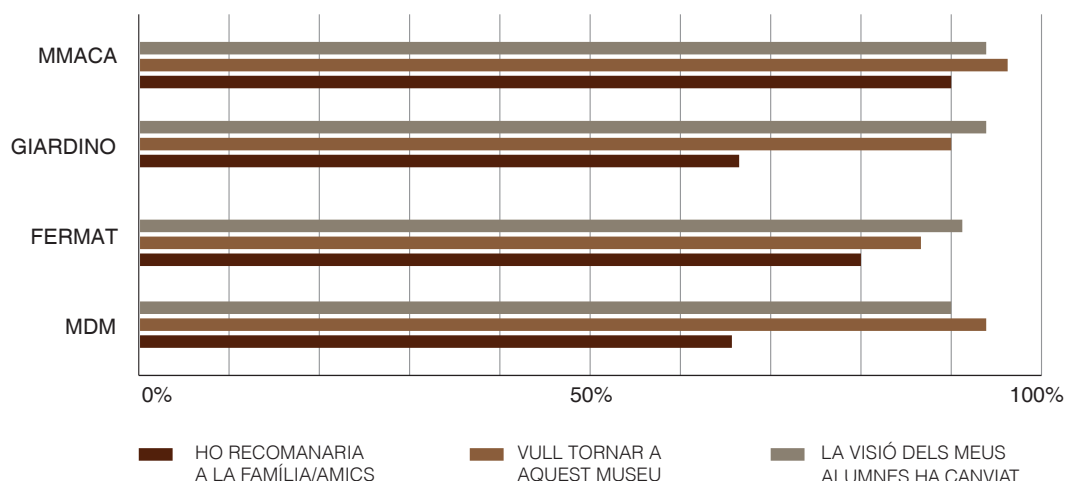


Els factors involucrats són molts i diferents, des de l'extensió de l'àrea d'interès, l'antiguitat de la institució, conveniència del transport, escoles, museus o projectes vinculats...

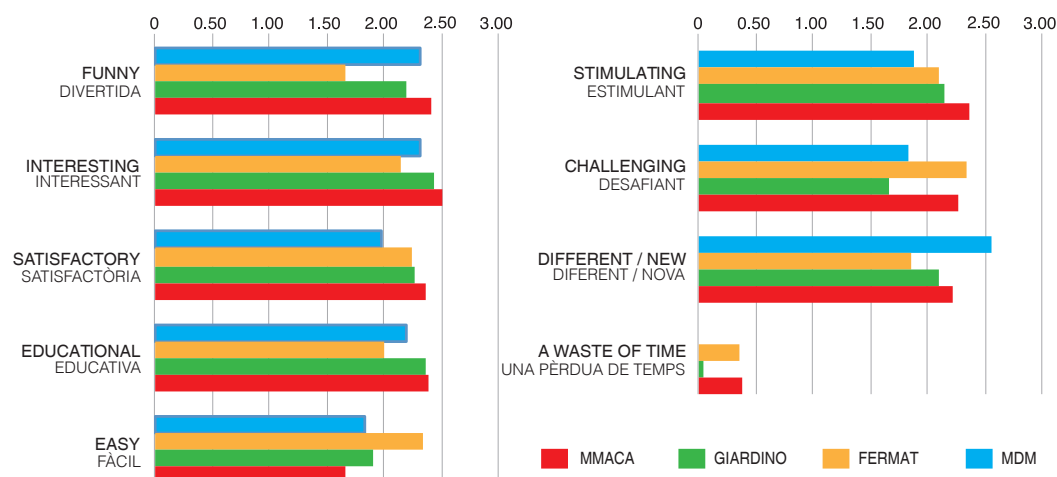
Tot i així, aquestes dades són un bon element de reflexió per pensar en com expandir la nostra àrea d'influència, la necessitat de formar professors per a fer les visites més productives, buscar més connexions que puguin fer servir a classe...

6.3. Què pensen els professors de la nostra proposta?

Tot i que demanem prudència, ja que el nombre d'enquestats és baix, els resultats del qüestionari són més que afalagadors. El 65-90% dels professors declaren que el museu els ha obert una nova visió de les matemàtiques, que expressen la intenció de tornar (85-95%) i recomanar la visita (90-95%).



L'èxit de la proposta es confirma amb el judici donat pels professors: interessant (2.75 de 3), satisfactòria (2.5), educativa (2.5), estimulant (2.5), nova/diferent (2.2).



És interessant observar que apareixen diferències entre professors de secundària i primària en la dificultat dels continguts i les activitats: 2.7 en una mostra gairebé tota formada per professors de secundària, i, en canvi, de 1.8 en els usuaris més joves.

I, de nou, l'experiència és tot menys una pèrdua de temps (0.4)!

6.4. El rol dels educadors

Finalment, un element crucial en el judici positiu de les propostes dels membres del projecte, tot i la diversitat de les propostes i la manera de treballar, sembla dependre dels educadors-facilitadors-mediadors culturals (tants noms per a tantes funcions!). La seva feina és avaluada amb un 2.5 de 3 en tots els contextos i edats (amb una petita baixada en les mostres d'adolescents).

