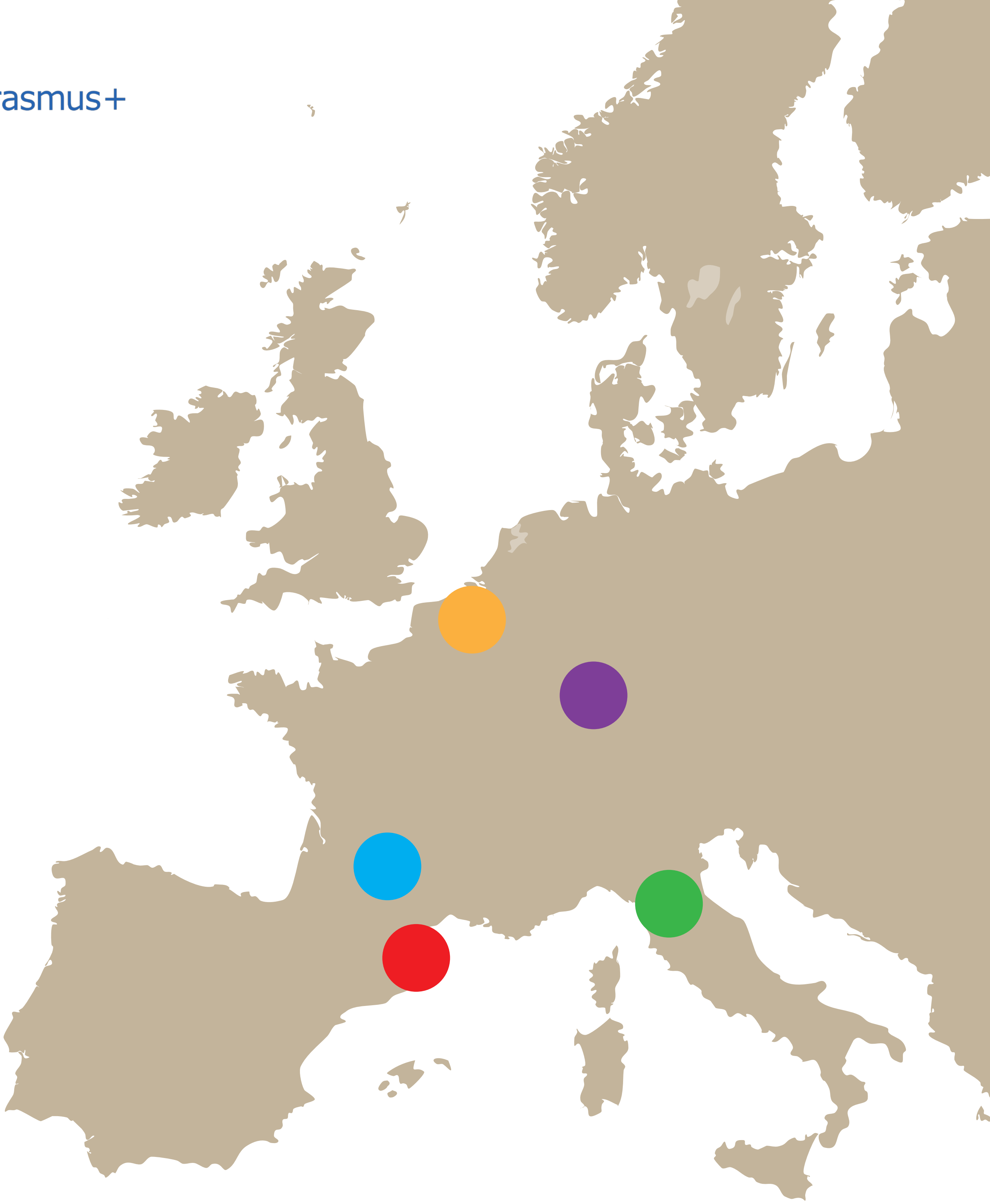
Erasmus+



Un acercamiento no formal a la educación matemática

mathspaces

Output 01 del proyecto MdM-ERASMUS+.

Este proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea.

Autores:

ASBL Entr'Aide, La Maison des Maths
Fermat Science
Il Giardino di Archimede
IMAGINARY gGmbH
MMACA - Museu de Matemàtiques de Catalunya

El MMACA es el coordinador de este documento, responsable del diseño, revisiones del texto y análisis de los gráficos.

Contenido

0 El proyecto Mathspaces

Las matemáticas son una piedra angular de la educación y son fundamentales para entender los retos de las sociedades modernas. A pesar de ello, en la percepción popular es todavía una de las materias más asociadas a la escuela y la educación formal. Algunas asociaciones y proyectos intentan acercar las matemáticas a los estudiantes y al público en general en contextos externos a la escuela, tales como exposiciones, ferias o museos, que llamaremos Mathspaces. Los cinco miembros del proyecto Mathspaces Erasmus+, La Maison de Maths, Fermat Science, Il Giardino di Archimede, IMAGINARY i el MMACA tienen una larga experiencia en la organización y gestión de tales espacios matemáticos y un largo historial en la enseñanza y comunicación de la ciencia. Este booklet pretende compartir las ideas y experiencias de los miembros del proyecto Mathspaces en el impacto de estas actividades en el proceso de aprendizaje de jóvenes y adultos, usando un método no formal de educación en matemáticas.

En un estudio revelador sobre las ciencias experimentales, J.H. Falk i L.D. Dierking [1] reportan:

[...] Los datos que reporta el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes muestran que un factor más influyente en los resultados de alto nivel es la participación en experiencias de aprendizajes libremente escogidas y realizadas fuera de las escuelas, como en los museos científicos.

[...] Nadie lo ha afirmado de manera tan clara y vehemente como el Proyecto de Investigación Familiar de Harvard, que sostiene: La presunción dominante en muchas corrientes de políticas y prácticas educativas es que la escuela representa el único lugar y periodo en el cual los niños aprenden. Esta afirmación es errónea. Cuarenta años de constante acumulación de datos demuestra que las oportunidades de “aprendizajes complementarios” y externos a las escuelas son el mayor indicador del desarrollo del niño y de su éxito educativo y cognitivo.

La investigación revela además los niños que sufren desventajas económicas o de otro tipo tienen menores posibilidades de acceso a estas oportunidades que sus coetáneos más favorecidos. Esta substancial discriminación influencia notablemente sus posibilidades de aprendizaje y éxito escolar.

El proyecto PISA de la OCDE (1997) [2], el Marco Europeo de Competencias (2006) [3] y su revisión (2017) [4] representan importantes oportunidades para abrir un diálogo entre las instituciones educativas formales y no formales para adaptarse a los modelos de aprendizaje de los nuevos tiempos y sus desafíos.

1 J. H. Falk and L. D. Dierking (2010). “The 95 Percent Solution”. American Scientist, volume 98: 486-493
2 http://www.oecd.org/pisa/
3 http://ec.europa.eu/education/policy/school/competences_en
4 https://ec.europa.eu/education/initiatives/key-competences-framework-review-2017_en

Los resultados PISA (2012) mostraron que más de un 22,1% de los estudiantes europeos tenía bajos resultados en matemáticas. Esto significa que uno de cada cinco jóvenes europeos no está equipado con las competencias básicas necesarias para muchas carreras valiosas para la economía de hoy.

La Comisión pretende reducir estas cifras hasta el 15% en 2020. En muchos países, sin embargo, los avances son todavía lentos e incluso, en algunos casos, el nivel está bajando.

Una razón puede ser la falta de compromiso o participación de los alumnos, que tienen una percepción muy negativa de la matemática; la mayoría de los estudiantes comienza su aprendizaje con la idea implementada de que “la matemática es difícil”. Con el objetivo de luchar contra esta idea, los últimos 10-15 años, hemos visto surgir en toda Europa un nuevo movimiento de museos, escuelas y casas de las matemáticas. Estos núcleos promueven un enfoque diferente y no formal, que ha probado su efecto en las competencias de los estudiantes de todas las edades, creando, sobre todo, una nueva relación personal con las matemáticas.

Aún así, estos espacios son todavía pocos. Esta carencia se debe principalmente al desconocimiento de este enfoque y las dificultades para encontrar los recursos y contenidos adecuados. Así, los miembros del proyecto, con el objetivo de afrontar el mal rendimiento en las habilidades básicas de matemáticas, hemos decidido unirnos para crear e impulsar un proyecto que quiere promover el conocimiento y uso de estos espacios dedicados al trato no formal de las matemáticas en la Unión Europea.

Así, nuestros proyectos recogen las sugerencias que Falk y Dierking ofrecen al final de su artículo, aun cuando ese esté relacionado con el aprendizaje de las STEM y no específicamente con las matemáticas y la realidad de los EE.UU., que no es exactamente igual que la de los Países europeos:

[…] No estamos defendiendo que se disminuyan los esfuerzos para mejorar y ampliar la educación científica en las escuelas. […] Queremos proponer que se incrementen los esfuerzos para mesurar las influencias complementarias y acumulativas de los aprendizajes dentro y fuera de las escuelas en el aprendizaje científico. En todo caso, dado que actualmente la educación científica escolar recibe una ayuda en recursos mucho mayor que las opciones no-regladas, un cambio, aún modesto, en esta proporción puede ser importante. Los datos sugieren que sería una sabia decisión.

ASBL Entr'Aide, La Maison des Maths	
Tipo: Asociación sin ánimo de lucro	
Oficina: Rue Jules Destree, 121 7390 Quaregnon (Belgium)	Sede: Rue du Coron, 105 7390 Quaregnon (Belgium)
Página web: http://maisondesmaths.be	
Contacto: maude@maisondesmaths.be https://www.facebook.com/maisondesmaths https://twitter.com/MaisonDesMaths	
Actividades principales: • "Ven y descubre un mundo mate-mágico" • Acogemos a grupos de escolares todos los días de la semana (preescolar, primaria, secundaria, bachillerato, universidades...) • Formación de docentes en matemáticas no formales (de preescolar a educación superior) • Organización de "mate-versarios". • Curso de formación "Mathins Malins" • 3 días de puertas abiertas cada año. • Una tienda con una rigurosa selección de juegos basados en su interés matemático. • Ferias locales y regionales • Showference "The Very Math Trip"	
Principales proyectos: • Erasmus+ project : MathSpaces • Erasmus+ project : Informath • Apertura de Mathalis, una nueva Maison des Maths en Lieja, enero de 2018. • MathLab: el primer laboratorio europeo móvil para la experimentación matemática.	
Principales mecenas: • Google • Mathematikum • La Région Wallonne	 • King Baudouin's Foundation • Fédération Wallonie-Bruxelles • Erasmus +

Fermat Science

Tipo:

Asociación sin ánimo de lucro

Sede:

Maison de Fermat
3, rue Fermat
82500 Beaumont de Lomagne (France)

Página web:

https://www.fermat-science.com

Contacto:

thomas.fermatscience@gmail.com
contact@fermat-science.com
https://www.facebook.com/FermatScience
https://twitter.com/fermat_science

Actividades principales:

- OTRA IDEA DE LAS MATEMÁTICAS
- Fermat Science organiza festivales de Ciencias y matemáticas, talleres, conferencias, exposiciones, espectáculos, para difundir las matemáticas ligadas al placer del descubrimiento. Usuarios en 2016: 25 000 personas.
- Organiza otros eventos alrededor de las matemáticas, como talleres de ciencia, encuentros matemáticos festivos como Festi'Maths, Récréa'Maths, Mater'Maths, el Science Festival, el Festival de Matemáticas, la semana de les matemáticas, Scientific Book show (exposiciones, talleres, conferencias, espectáculos)
- Creación de herramientas educativas: talleres, exposiciones, kits educativos…
- A través de diferentes talleres, Fermat Science ofrece un enfoque concreto de las matemáticas y diversas nociones científicas. Los talleres, basados en la manipulación y los juegos, invitan a los usuarios a interactuar y abrir un proceso de aprendizaje que le permite "ver y comprender"

Principales proyectos:

- Erasmus+ project : MathSpaces
- Europe project: Diffusion des mathématiques en Occitanie
- Apertura de La Maison des Maths, un nuevo museo de matemáticas en Beaumont de Lomagne, 2019

Principales mecenas :

- Fondation EDF
- Fondation Banque Populaire Occitanie
- La Région Occitanie
- Le département 82
- La mairie de Beaumont de Lomagne
- Le LABEX CIMI Université Toulouse
- Erasmus +

ILGIARDINODI
ARCHIMEDE
UN MUSEO PER LA MATEMATICA
www.archimede.ms

Il Giardino di Archimede.
Un Museo per la Matematica

Tipo:

Asociación sin ánimo de lucro

Sede:

Via S. Bartolo a Cintoia 19a
50142 Firenze

Página web:

http://www.archimede.ms

Contacto:

archimede@math.unifi.it
tel +39(0)557879594

Actividades principales:

- Museo interactivo dedicado a las matemáticas y sus aplicaciones, en el que los visitantes pueden familiarizarse con las matemáticas y descubrir su importante papel en la vida cotidiana. Dividido en cuatro secciones dedicadas a diferentes temas: la geometría de las curvas, el teorema de Pitágoras, Leonardo Fibonacci y las máquinas de Galileo.
- Organiza conferencias nacionales para profesores de matemáticas y promueve la inclusión de la historia de las matemáticas en la docencia.
- Organiza la Festa della Matematica (anual).

Principales proyectos:

- Erasmus+ project: MathSpaces
- WELCOME, proyecto local para museos inclusivos.
- Le Chiavi della Città, proyecto local para escuelas.

Principales mecenas:

- MIUR: Ministero Università e Ricerca
- MIBAC- Ministero per i Beni e le Attività Culturali

IMAGINARY gGmbH

Tipo:

Asociación sin ánimo de lucro

Sede:

Mittenwalder Str. 48
10961 Berlin, Germany

Página web:

https://www.imaginary.org

Contacto:

info@imaginary.org

Actividades principales:

- IMAGINARY crea y distribuye materiales interactivos de exposición para comunicar las matemáticas modernas al público en general y promover la educación matemática y el conocimiento.
- Ofrece fotos, impresiones 3D, materiales manipulables y software interactivo de código abierto en su página web.
- Empodera la gente para organizar exposiciones locales y así llevar las matemáticas modernas a todos los rincones de la tierra.
- Consolida una red internacional de entusiastas de las matemáticas, funcionando como un laboratorio de ideas para la comunicación matemática moderna.
- Es colaborativa, global, gratis y cercana a la investigación.

Principales proyectos:

- IMAGINARY ha inspirado a millones de visitantes en más de 50 países y 27 lenguas desde 2008.

Instalaciones permanentes:

- National Museum of Mathematics, Nueva York, EUA.
- Deutsches Museum, Munich, Alemania.
- Centro comercial matemático “Mathematikon”, Heidelberg, Alemania.
- CAMP (Center for Application of Mathematical Sciences), Daejeon, Corea del Sur.

Exposiciones itinerantes nacionales:

- Bélgica, Francia, Alemania, Israel, Holanda, Rusia, Corea del Sur, España, Taiwan, Turquía, Uruguay.

IMAGINARY gGmbH

Principales proyectos (cont.):

Numerosas exposiciones itinerantes y eventos:

- Exposición NIMS-IMAGINARY en el International Congress of Mathematicians, Seul, Corea del Sur, 2014
- Exposición Mathematics of Planet Earth en el Imperial College London, Reino Unido, 2015
- Exposición IMAGINARY en el Next Einstein Forum (NEF), 2016, Senegal
- Exposición IMAGINARY en el Volkswagen DRIVE, Berlin, Alemania, 2017

Otros proyectos:

- Proyecto Erasmus+: MathSpaces
- Conferencia IMAGINARY Open and Collaborative Communication of Mathematical Research, Berlin, Alemania, 2016
- Red de Comunicación Matemática (newsletters, recursos abiertos, información…), apoyo a la comunidad de profesionales en divulgación matemática.
- Infraestructura y software para el nuevo museo de astronomía ESO Supernova en Munich, en colaboración con el Heidelberg Institute for Theoretical Studies (HITS).
- Competiciones de imágenes obras de arte, módulos de exposición, películas, etc. Como el Mathematics of Planet Earth (2013 i 2017), MathLapse concuros de films (2016), Math Creations (2017).
- Talleres para escuelas y otros públicos.
- Contribuciones en coferencias (artículos, talleres, exposiciones, curtmetratges).
- Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach: textos cortos sobre diversos aspectos de las matemáticas modernas escritos por investigadores del Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO)

Principales mecenas:

- Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO)
- Leibniz Association
- Klaus Tschira Stiftung (KTS)
- Federal Ministry of Education and Research (BMBF)

Erasmus+

mmaca
Museu
de Matemàtiques
de Catalunya

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Tipo:

Asociación sin ánimo de lucro
Declarada de interés público
Entidad oficial de formación del profesorado

Sede:

Palau Mercader - Parc Can Mercader
08940 Cornellà de Llobregat

Página web:

http://www.mmaca.cat

Contacto:

contacte@mmaca.cat
@MMACA_cat
https://www.facebook.com/mmaca.cat

Actividades princpales:

- Exposición permanente manipulable e interactiva en el Palau Mercader de Cornellà de Llobregat (Barcelona)
- De dos a cuatro exposiciones itinerantes cada año en Cataluña.
- Ferias locales y regionales.
- Conferencias y talleres en congresos de docentes, universidades, centros de formación de adultos, centros de formación permanente...
- Venta de materiales rigurosamente seleccionados según su interés matemático, muchos de ellos de diseño propio.

Principales proyectos:

- Comunidad de prácticas de entidades educativas formales y no formales.
- Exposición de espejos y caleidoscopios en colaboración con CosmoCaixa.
- Proyecto-Taller Leonardome.
- MathsWeek in Ireland (2015-2017)
- Proyecto Maletines en colaboración con la Diputación de Barcelona.
- Proyecto Tens Talent con la Fundación La Caixa.
- Organización de la 3ª Conferencia MATRIX (octubre 2018)

Principales mecenass:

- FEEMCAT - Federación de Entidades para la Enseñanza de las Matemáticas de Cataluña
- SCM - Sociedad Catalana de Matemáticas
- Departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya.
- Departamento de Educación de la Diputación de Barcelona
- Ayuntamiento de Cornellà
- Fundación Cellex
- Hewlett-Packard Spain

1 ¿Qué es la educación no formal?

Según la UNESCO (Youth, Education and Action to the New Century and Beyond, Unesco, 24 Julio 1998):

- Educación formal: sistema educativo estructurado jerárquicamente, evaluado cronológicamente que va desde la educación primaria hasta la terciaria, en instituciones especializadas.
- Educación informal: el proceso por el cual cada individuo adquiere habilidades, valores, actitudes y conocimientos a través de la experiencia diaria, a través de padres, amigos, medios de comunicación y otras influencias del entorno.
- Educación no formal: actividades educativas organizadas fuera del sistema formal establecido dirigidas a un público de estudiantes con objetivos de aprendizaje específicos.

1.1. Diferencias entre el enfoque formal y el no formal.

Las diferencias que propone Rogers (Rogers, 2005) son:

METODO FORMAL (F.A.)	METODO NO FORMAL (N-F.A.)
Selectivo: piramidal, selecciona y luego entrena; el sistema rechaza participantes en algunas etapas; una vez afuera no se puede entrar; el sistema sirve a unos pocos (elitista); caro	Abierto: posibilidad de entrar y salir libremente; sin selección previa; autoselección de los participantes; no hay rechazos; sin fracaso; no hay ningún abandono definitivo; económico
Alejado de la realidad: período de educación sin trabajo seguido de un período de trabajo sin educación; saca a los participantes de su contexto para encerrarlos en una enseñanza a tiempo completo; sustituye la experiencia de la vida por las experiencias del aula; aprende ahora para un uso futuro; currículum académico, irrelevante, colonial.	Educación en la realidad: aprendiendo a ser, no a convertirse en alguien diferente; aprendiendo a vivir en el contexto ahora; utiliza experiencias y conocimiento existente; currículum relevante, aplicación inmediata; ocupación parcial y no total, utiliza conocimientos propios.
Terminal:Educación que llena y bloquea; capitalización del conocimiento; envía participantes al mundo entrenados para la vida, completamente equipados sin necesitar más; certificado	Continua: la educación no se completa nunca porque siempre se añaden nuevas cosas; Menos interés en certificados; admite “no lo sé”.
Resultados: crea estudiantes dependientes; el aprendizaje para cuando el profesor no está.	Resultados: crea estudiantes independendientes, confiados y con continuidad.

Creemos que estos análisis tienden a exagerar las faltas de una y los méritos de la otra.

Roger puede subestimar el continuo intento de la educación formal de renovarse, influida por las contribuciones de muchos factores diferentes como pedagogía constructivista o la revolución tecnológica, tratando de responder a los retos de una sociedad en cambio continuo y rápido.

Convencidos de que tenemos que promover el intercambio de experiencias y buenas prácticas entre las escuelas y museos/centros de ciencia, hemos tratado de tener en cuenta las diferencias entre formal e informal con un poco más objetividad y en respecto a:

- **Temporización**: rigidez respecto a las previsiones previas. Las actividades escolares se realizan en un tiempo acotado y, por tanto, la flexibilidad es mínima. En la enseñanza no formal, podemos intentar conseguir la máxima flexibilidad permitiendo a los participantes establecer el tiempo que necesitan para ejecutar una tarea en función de su interés, conocimientos o habilidad.

- **Contenido**: fidelidad al currículum. La enseñanza no formal, se basa a menudo en contenidos de la materia no incluidos en el currículum escolar. Algunos centros de ciencias creen que su propuesta tendría que ser completamente extracurricular, de forma que una visita al museo pueda ser una experiencia cultural original absolutamente diferente de una actividad escolar.

- **Dinámicas**: tareas individuales/colectivas, resultados, verificaciones... En las escuelas, el progreso del alumno medio determina a menudo el ritmo de la clase, condenando a quedar atrás a los peor preparados y a la frustración a los que tienen más disposición y/o capacidades. En las exposiciones de los centros de ciencia, cada participante puede decidir cuando parar, incluso si forma parte de un grupo de cooperación. Una característica de la enseñanza no formal es la heterogeneidad de los grupos que se forman, a veces centrados en un solo módulo. El resultado es una comunicación mucho más real y menos previsible.

- **Relaciones**: transmisión (de quien sabe a quien todavía no) y colaboración (comunidad de aprendices). En una situación no formal los roles no se asignan previamente. El intercambio de información es libre y bidireccional; la autoridad se gana sobre el terreno y solo es temporal.

- **Comunicación**: cantidad y tipo de información necesaria para realizar una tarea. En la escuela, la actividad del alumno está respaldada por una gran cantidad de información: profesor, libro de texto y recursos suplementarios. En una exposición de un centro de ciencia, la información de partida a menudo se reduce simplemente a las normas imprescindibles para resolver la tarea. Los facilitadores tendrían que ayudar lo mínimo posible; sugerir pero nunca resolver; acompañar pero no guiar. Habría que delegar la profundización o enriquecimiento de las nociones a otras situaciones como un taller (en el museo o escuela), la investigación individual o, por qué no, una intervención escolar posterior, puente con la educación formal.

Los módulos producen comunicación espontanea entre el público.

Hay dos tipos de personas: las que aman las matemáticas y las que todavía no han descubierto que las aman.
MMACA

Por supuesto, nuestro interés, las experiencias y propuestas que hacemos, están centradas en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, creemos firmemente que muchas pueden ser extrapoladas a otras disciplinas, como parecen demostrar los proyectos de refuerzo de las STEM o STEAM.

> ***Las matemáticas son un juego con unas ciertas reglas simples con marcas sin sentido en un papel.***
>
> ***David Hilbert***

De hecho, las matemáticas tienen un alto nivel de formalismo, esencial para el tratamiento de ciertos aspectos teóricos complejos. Sin embargo, un formalismo excesivo y prematuro puede causar que la forma y el lenguaje se conviertan en el principal contenido de la disciplina, excluyendo la intuición natural y el placer lúdico tan típicas de la raza humana.

El riesgo final es que una gran parte de la población se aleje de las matemáticas formándose una idea distorsionada como disciplina fría y seca, distanciada de la realidad, incomprensible y abstracta.

> ***No dejamos de jugar porque nos hagamos mayores; nos hacemos mayores porque dejamos de jugar.***
>
> ***George B. Shaw***

No estamos hablando de «ciencia divertida» [1], sino de un enfoque seductor para atraer a más gente hacia una relación positiva con las STEAM. Especialmente cuando:

> ***El humor es de lejos la actividad más significativa del cerebro humano.***
>
> ***Edward de Bono***

1.2. Elementos comunes de la enseñanza formal y la no formal

Este es el centro de nuestra propuesta: creemos firmemente que los enfoques formal y no formal han de colaborar. En un museo o un centro de ciencias, no hay que reproducir mecanismos escolares. No hemos de enseñar, sino ofrecer situaciones abiertas de aprendizaje, A menudo, una visita a un museo provoca una emoción positiva que puede ser la semilla de un nuevo interés en las STEAM.

En las escuelas hemos de aprovechar cualquier oportunidad que permita a los alumnos desarrollar sus propios interés y habilidades, solos o en grupo, y animarlos a compartir su investigación con la clase..

Más aún, hay importantes aspectos que se pueden desarrollar tanto en la clase como en los centros de ciencias.

---

1 http://www.ecsite.eu/activities-and-services/news-and-publications/digital-spokes/issue-13#section=section-indepth&href=/feature/depth/fun-science-seductive-science

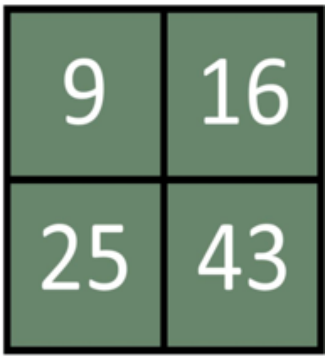
1.2.1. No puedes enseñar nada a un ser humano; solo puedes ayudarle a encontrar la respuesta en su interior.

Galileo Galilei

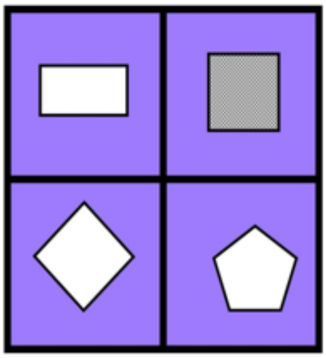
Un aprendizaje a largo plazo tiene que ir de la mano de un deseo profundo de aprendizaje por parte del aprendiz. Esto significa que debemos ofrecer actividades que estimulen el interés y la autonomía. Actividades que estimulen y los alienten a buscar y comunicar resultados en su trabajo.

Podemos proponer problemas abiertos, con más de un solución posible y discutir la estrategia. Un buen ejemplo es la página web open-source ***Which one doesn't belong?*** [2]

Los retos abiertos permiten a los usuarios encontrar soluciones originales y nuevas estrategias que quizás no habíamos previsto. Esto puede llevar a niveles de profunda satisfacción que también nosotros hemos podido sentir alguna vez, a veces con materiales que conocíamos de años.



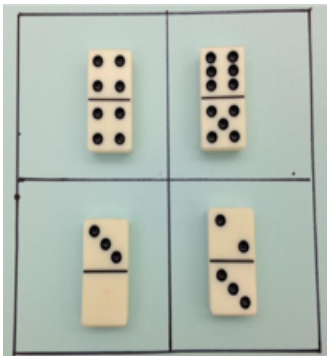
El objetivo de promover la investigación personal o grupal también se puede lograr con la ayuda de material informático. Empezando por una situación estándar (una forma, un dibujo, una tabla de datos o una fórmula, dependiendo del programa), se pueden introducir pequeñas modificaciones y ver como cambian los efectos en tiempo real. La inmediatez de la respuesta facilita el desarrollo de la investigación. Es fácil ver cómo la secuencia de aprendizaje descrita por el círculo de Kolb (ver sección 1.2.c) funciona también con las actividades informatizadas.



En la misma línea, sería interesante mostrar algunos de los problemas históricos resueltos (fracciones recurrentes, suma de infinitas secuencias de cuadrados o números triangulares ...) y /o sin resolver (la conjetura de Fermat, la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo ...) acompañados de materiales virtual o manipulable que muestren la simplicidad de la pregunta y la dificultad de la solución..

1.2.2. El objetivo principal de la educación en las escuelas debería ser crear personas que sean capaces de hacer cosas nuevas, no sólo repetir lo que han hecho otras generaciones.

Jean Piaget



¿Qué elemento no pertenece al grupo? ¿Por qué?

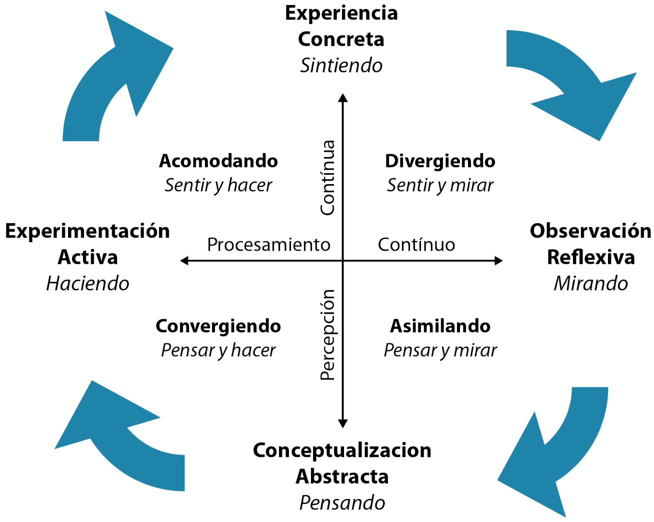
Tendríamos que optar decididamente por un aprendizaje basado en la competencia, la mera transmisión de contenidos y estrategias no es suficiente

2 http://wodb.ca/index.html.

> ***«El foco de la educación competencial es el estudiante, que trabaja de forma natural de manera más independiente, con el instructor que adquiere el papel de facilitador. Este método de aprendizaje permite que el estudiante adquiera los instrumentos personales a través de retos que se impone a su propio ritmo, practicando y afinando todo lo que le guste. Después, será libre de pasar rápidamente a otras competencias en las que sea más experto.»***
>
> ***https://en.wikipedia.org/wiki/Competency-based_learning***

1.2.3. Hay diferentes maneras de aprender, por eso tenemos que ofrecer estrategias y experiencias alternativas y diversas.

El ciclo de Kolb es uno de los modelos más populares que muestran la relación entre experiencia, reflexión, conceptualización y experimentación.



Hay quien necesita empezar por una situación concreta, un reto motivador para iniciar un proceso de aprendizaje personal que necesita atravesar las cuatro fases para consolidarse. Pero también hemos encontrado en nuestras exposiciones a usuarios que necesitan un marco teórico para interactuar con un módulo.

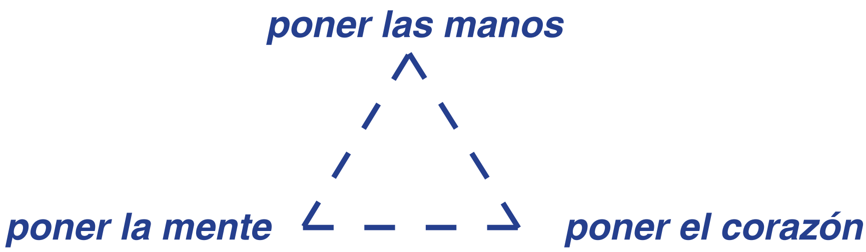
Como se ha dicho, cada individuo debe encontrar su propio camino para aprender y escoger la mejor manera de empezar. Después, es importante atravesar las fases, ayudado por un educador o colaborando con otros aprendices.

En algunos centros de ciencia ofrecemos experiencias manipulativas; retos a resolver. La experimentación táctil no es nuestro objetivo, sino el comienzo de un proceso que debe conducir a la construcción de conceptos, que serán reforzados a su vez con la experimentación. Las fases podrían ser:

Manipulación $\longrightarrow$ construcción de objetos $\longrightarrow$ construcción de conceptos

Al mismo tiempo, debemos asegurarnos de que nuestros materiales sean sugerentes en diferentes aspectos.

Deben ser:



Hacer, pensar y sentir no de manera secuencial, sino en un ciclo virtuoso.

1.2.4. Ofreciendo espacios para que los estudiantes hablen entre ellos, les damos marcos para que piensen por ellos mismos.

Lev S. Vygotsky

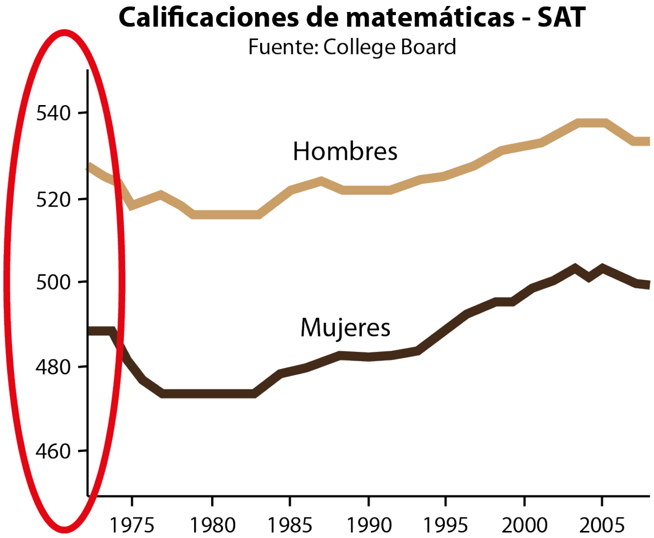
La comunicación es uno de los aspectos fundamentales del aprendizaje basado en competencias y, por supuesto, de las dinámicas colaborativas.

Vemos cada día como grupos de tres, cuatro, cinco personas que no se conocen se forman espontáneamente en torno a un módulo para colaborar en la solución del reto. Grupos heterogéneos en sexo, edad y habilidades conversan, proponen y verifican hipótesis y prueban soluciones.

1.2.5. La ciencia no es un juego de chicos; no es un juego de chicas. Es un juego para todos. Es sobre dónde estamos y dónde vamos.

Nichelle Nichols

En nuestras exposiciones y talleres no detectamos diferencias en interés ni habilidad entre chicos y chicas. Las diferencias a que se refieren algunas investigaciones (no siempre de buena fe) no tienen evidencias significativas, incluso entre adolescentes donde algunas dinámicas y actitudes son más conflictivas. La naturaleza colaborativa de las actividades y la importancia del aspecto comunicativo favorecen la participación de chicas, que a menudo tienen un papel de liderazgo. Las actividades competitivas son pocas y son siempre dirigidas a la superación del rendimiento personal, no del oponente. Los objetivos importantes son entender los roles del juego y la colaboración necesaria para elaborar y exteriorizar una estrategia ganadora, mejorando así también su autoestima.



La escala parece elegida para amplificar la diferencia.

1.3. ¿Cómo podemos implementar estrategias de aprendizaje no formal?

Esta tabla resume las acciones que pueden ser dirigidas a centros educativos que quieran introducir estrategias educativas no formales para mejorar el aprendizaje.

ACCIÓN	TEMPORIZACIÓN	DINÁMICAS	CARACTERÍSTICAS	
EXPOSICIONES	60 a 90 min.	Actividades libres o guiadas	Experiencia	Excitación
			Sorpresa	Seducción
FERIAS	10 min. a 3 h	Actividades seleccionadas	Juegos	Diversión
			Competitividad	Gran Público
TALLERES	60 a 90 min.	Actividades guiadas	Acompañar y complementar el currículo	Construcción de experiencias y materiales
CONFERENCIAS	10 a 90 min.	Actividades participativas	Sorpresa	Magia
			Curiosidad	Espectáculo
FORMACIÓN DE PROFESORADO Y EDUCADORES	3 a 20 h	Actividades guiadas	Teoría	Apropiación
			Profundización	Empoderamiento
			Tutorías entre compañeros	Creatividad

- **Exposiciones**: son posibles diferentes modelos, desde una visita guiada a talleres libres. En el primer caso, el educador guía al grupo a descubrir el concepto clave proponiendo o señalando determinados materiales importantes. En la segunda modalidad, el educador sólo explica un módulo, como modelo de cómo utilizar el material y emprender los retos. Finalmente, dejan interactuar libremente a los visitantes, minimizando sus intervenciones. Deben sugerir, no solucionar, ajustando dinámicas y recomendando nuevos retos.

- **Talleres**: a menudo representan un buen puente entre la exposición y la escuela, ya que el facilitador puede conducir con más facilidad a la conceptualización.

  Un taller puede ser improvisado en la exposición también, a raíz de un módulo o experiencia, con la idea de profundizar un tema que puede haber estimulado interés.

  También pueden tener lugar en la clase, construyendo o reconstruyendo materiales para entender mejor el significado y las matemáticas escondidas detrás de la fácil interacción.

  Inspirados por el Exploratorium de San Francisco, abrimos un debate: ¿Cuáles son las diferencias sustanciales entre los talleres en la escuela y en el museo?

- **Ferias**: el objetivo de las ferias es el de mostrar el aspecto más agradable y divertido de las matemáticas. Las actividades deben ser rápidas y atractivas. Pueden ser especialmente interesantes si los propios estudiantes se involucran en la organización de la feria, actuando a su vez como educadores.

- **Conferencias**: pueden ser una buena oportunidad para consolidar la presencia de un museo o centro de ciencia en el territorio, mostrando los aspectos más sorprendentes de las matemáticas (la profunda relación con los juegos de magia, por ejemplo). Las conferencias también representan una fantástica oportunidad para el diálogo - tanto necesario como inusual- entre educadores, trabajadores culturales, creadores e investigadores.

- **Formación de profesorado y educadores**: las estrategias de aprendizaje no formales son especialmente útiles en esta situación, donde compartir experiencias y co-elaborar nuevas estrategias es el objetivo principal. Los profesores deben familiarizarse con el material y las actividades para poder controlar y adaptar los mecanismos a la situación de su clase. Es una situación paradigmática donde introducir tareas y competencias y estimular la construcción de conceptos matemáticos personales.

  El debate en esta área es muy abierto:

  - Formación destinada a actividades durante las visitas al museo (corta, al menos 3 horas) o para iniciar una colaboración museo-escuela (larga, al menos 20 horas).

  - Posibilidad de intervenir en la organización de la formación inicial del profesorado.

  - Comunión entre la formación de profesorado y educadores.

2 Beneficios de la participación

Para empezar este capítulo, buscaremos ejemplos concretos y cotidianos para poder contestar la pregunta:

2.1. ¿Es cierto que la escuela acaba con la creatividad? [1]

Hablar con niños y niñas de 4-5 años sobre qué han hecho en la escuela nos revela mucha información. El lenguaje preciso y concreto que usan para describir aquellos descubrimientos, cantar una canción o recitar una poesía, hablar de la evolución del ser humano, su cuerpo... Y aún así, este niño no tiene libreta ni vuelve a casa con deberes. Las guarderías son un gran ejemplo educativo: las paredes, las mesas, las estanterías, todo está lleno de materiales, paneles, juegos que estimulan la vista, el tacto, el olfato, el oído e incluso el gusto.

Trabajo creativo
La Maison des Maths

En la guardería se estimulan los cinco sentidos. Algunas investigaciones en neurociencia y, en particular, la Programación Neurolingüística sugieren que el proceso de aprendizaje es más efectivo cuando se estimulan múltiples sentidos [2] [3]. Los maestros de jardín de infancia usan este principio regularmente. El descubrimiento a partir de la manipulación es el vector principal de aprendizaje.

¿También funciona si consideramos el aprendizaje de conceptos abstractos (como lo son muchos conceptos matemáticos)? Quizás estamos centrándonos en conceptos previos para reiterar que la experimentación activa es importante escuela.

Algunos autores sugieren que los estudiantes de educación secundaria son menos creativos [4] y la dificultad en resolver tareas complicadas crece en la secundaria... ¿La escuela mata la creatividad?

2.2. Música y matemáticas.

Aprender música es parte del aprendizaje formal. De hecho, la ejecución de una pieza musical requiere asumir los códigos que llevan a descifrarla:

1 http://www.huffingtonpost.com/line-dalile/a-dictator-racing-to-nowh_b_1409138.html

2 Stein BE, Stanford TR, Rowland BA (December 2009). “The neural basis of multisensory integration in the midbrain: its organization and maturation”. Hear. Res. 258 (1-2): 4–15.

3 Stein BE, Rowland BA (2011). “Organization and plasticity in multisensory integration: early and late experience affects its governing principles”. Prog. Brain Res. 191: 145–63.

4 https://people.goshen.edu/~marvinpb/11-13-01/Effects-of-Stereotypes.html
http://www.sheknows.com/parenting/articles/1024783/kids-are-getting-smarter-but-less-creative
http://faculty.ucr.edu/~aseitz/pubs/Shams_Seitz08.pdf
https://www.mpg.de/8934791/learning-senses-vocabulary

el solfeo. Independientemente de la elección del instrumento, las bases están fijadas y solo se necesita seguir el procedimiento para producir una nota do, re o mi. El sistema formal de la partitura puede ser expresado a través de una herramienta concreta de representación: el instrumento. El contacto temprano con el instrumento, previo a la codificación de la partitura, puede ser considerado aprendizaje no formal. Quizás no aumente el número de músicos profesionales, pero sí el número de jóvenes que aprecia la música.

Aprendizaje diversificado
La Maison des Maths

La manipulación de materiales y el énfasis en la estimulación de los sentidos se refieren a la importancia de contar con herramientas adecuadas a los sistemas formales que se representan

El aprendizaje no formal de las matemáticas se basa en la funcionalización del aprendizaje matemático, en forma, por ejemplo, de decisiones razonables y razonadas, formulaciones o argumentos. Esto lleva a crear situaciones que conducen a la construcción de conceptos matemáticos sin una enseñanza o entrenamiento previo directo o formal.

La matemática no formal plantea el problema de por qué y cómo recoger conocimientos y organizarlos en una jerarquía para facilitar su uso, profundizar el aprendizaje y adaptarse a otras situaciones.

2.3. ¿Es el sistema formal la única manera de aprender?

El método prueba y error es muy importante para el aprendizaje de los niños y ha estado siempre presente en la historia de la humanidad, que ha descubierto, manipulado y modelado conceptos desde hace milenios. Entonces, ¿por qué en los países occidentales continuamos creyendo que el aprendizaje formal es la única manera de aprender?

Los PISA 2015 contienen los resultados de 540 000 estudiantes de 15 años en 72 países tanto de la OCDE como otros que no pertenecen, Este panel es considerado representativo de los 29 millones de estudiantes de estos 72 países y economías. Los resultados aparecen como lo hacen los estudios PISA. Se basan en puntos adquiridos en ciencias, el foco principal del estudio.

En la mayoría de currículos de las escuelas occidentales, las matemáticas ocupan una posición prominente, y su enseñanza y aprendizaje están profundamente arraigados en este modelo. Es globalmente aceptado que los conceptos matemáticos son objetivos, universales y fundamentales, tal vez más que en ninguna otra disciplina científica. Estas matemáticas formales y / o académicas se consideran una herramienta imprescindible que todo estudiante debe adquirir y dominar al final de la educación obligatoria. A ello se añaden la cultura de los resultados cuantificables, el examen del conocimiento, las certificaciones..

#	PAÍS	PUNTOS	#	PAÍS	PUNTOS	#	PAÍS	PUNTOS
1	Singapur	564	6	Macao (China)	544	15 ex	Alemania	506
2	Japón	532	7	Canadá	516	20	Bélgica	507
3	Estonia	520	8	Vietnam	495	26 ex	Francia	493
4	Taipei (China)	542	9	Hong-Kong	548	28 ex	España	486
5	Finlandia	511	10	China	531	34	Italia	490

Sin embargo, estos conceptos no se ven necesariamente reflejados en las encuestas de resultados académicos, en el caso de las matemáticas, comparando resultados con los de otros países de la OCDE.

Esta lista incluye muchos países con diferentes situaciones económicas y sociales, haciendo imposibles e injustas las comparaciones, por lo que estos resultados deberían ser tomados con cuidado. En cualquier caso, nos obliga a preguntarnos si existe un peligro de estancamiento en la enseñanza formal de las materias. Sería impensable no enseñar conceptos, métodos o entrenar habilidades específicas, por supuesto, pero reproducir modelos educativos obsoletos es suicida. .

¿Podría ser que estas diferencias entre rendimientos y países sea el resultado de diferentes y mejores métodos de enseñanza? ¿Qué hacen los países que obtienen mejores resultados?

Documentos de referencia de la UE sobre aprendizaje.

2.4 - ¿Cuál es la mejor manera de aprender?

Según el informe de Rocard “Science Education: Now” [5] y el informe Eurydice “The teaching of mathematics in Europe: common challenges and national policies” [6], la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere diferentes métodos educativos.

Existe un consenso general de que ciertos métodos, como el aprendizaje basado en problemas, la investigación y la contextualización, son particularmente efectivos para lograr resultados y mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Aunque la mayoría de las autoridades centrales de Europa dicen que brindan una guía sobre cómo enseñar matemáticas, es necesario fortalecer el apoyo a los métodos que fomentan la participación activa de los estudiantes y el pensamiento crítico.

Es obvio, por supuesto, que, como en el ejemplo de aprender música, haber asimilado los códigos de descifrado de las matemáticas (reconocimiento de números, operaciones básicas...) es una ventaja. ¿Pero qué hay de la música autodidacta? No se sabe que Paul McCartney haya asistido a escuelas de música formales. ¿Lo hace menos competente en sonido, ritmo, medida...?

Otros músicos populares tienen un sólido bagaje formal, de modo que todas las opciones permanecen abiertas y muy a menudo se entrelazan.

En cualquier caso, vale la pena reflexionar sobre cómo el advenimiento de la tecnología, incluso simple, de una calculadora a un corrector de texto, ha cambiado el valor de los componentes esenciales para un buen rendimiento. Los aspectos más técnicos y mecánicos se han delegado en la máquina, mientras que los seres humanos son esenciales para la creatividad, la conceptualización y, por último pero no menos importante,

5 http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

6 http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key_data_series/134EN.pdf

el control de calidad del producto, también facilitado por la velocidad a la que las máquinas proporcionan resultados.

En el campo de la creación musical, hay programas (como Sibelius, Finale Note-Pad, Musescore ...) que, a través de una dinámica heurística, transcriben composiciones hechas de oído a un equipo musical, lo que permite una escucha inmediata, aunque requiera ajustes.

La mejor tecnología (programas interactivos, abiertos, comunicativos) tiene interesantes aspectos pedagógicos. Parte de la creatividad humana reside en romper con los patrones [7]. La capacidad de hablar de algo que no existe o de mentir, las demostraciones reductio ad absurdum o la prueba por contradicción, el derrocamiento de las bases teóricas ... puede dar la vuelta a la rigidez de las restricciones típicas de la ejecución mecánica. Por lo tanto, aumentar los desafíos y hacer frente a tareas consistentes puede mejorar la adquisición de habilidades técnicas por parte del músico profesional o aficionado.

Exposición.
La Maison des Maths.

2.5. Las matemáticas no formales en el centro del aprendizaje.

Muchos estudios (e.g. Carraher & Schliemann) [8] [9] [10] reafirman la idea de que las matemáticas no formales pueden proveer una base para construir conocimientos matemáticos más sofisticados.

Estos dos autores consideran que las actividades de clase se pueden transformar de manera que permitan al aprendiz experimentar con una pluralidad de situaciones matemáticas, herramientas y conceptos que hacen explícitos los vínculos entre las matemáticas de la vida cotidiana y las desarrolladas en la escuela.

Con las matemáticas no formales, los estudiantes están en el corazón del aprendizaje: descubren, manipulan y modelan. El enfoque no formal puede basarse en el aprendizaje individual y grupal como parte de una mejora colectiva general. Es participativo, se centra en el alumno y está basado en la acción y la experiencia.

Las ventajas de este modelo son numerosas e incluso exceden a las adquisiciones matemáticas, al tocar las capacidades de cooperación, creatividad, libertad, comunicación...

7 Debemos conocer bien las normas para poder romperlas adecuadamente. Dalai Lama.

8 Carraher, D. & Schliemann, A.D. (2002). Empirical and Logical truth in Early Algebra activities: From guessing amounts to representing variables. Symposium paper NCTM 2002 Research Presession. Las Vegas, Nevada, April 19-21. [View abstract]

9 Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (2002). The Evolution of Mathematical Understanding: Everyday Versus Idealized Reasoning. Developmental Review, 22(2), 242-266. [View abstract]

10 Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? In J. Moshkovich & M. Brenner (Eds.) Everyday Mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education, 11, 131-153.

Cuentos matemáticos.
La Maison des Maths.

2.6. Una necesidad para nuestra sociedad.

En conclusión, trabajar con las matemáticas no formales responde sobre todo a una necesidad social de motivar a los jóvenes, sin discriminación de sexo, ingresos y origen, en las ramas de STEAM, que son útiles para el mantenimiento y el desarrollo de nuestras sociedades.

La motivación y la autoestima crecen porque uno puede elegir qué desafío resolver, solo o en grupo, pensando, discutiendo, explicando, utilizando el tiempo que necesita, ya sea para limitarse a la resolución del desafío o para profundizar en el estudio del tema.

Al activar el principio de prueba y error experimental, el alumno puede, en algunos aspectos, convertirse en autodidacta en matemáticas. Las actividades universales relacionadas con las matemáticas (contar, medir, ubicar en el espacio, dibujar y construir, jugar y explicar) pueden desarrollarse de acuerdo con diferentes modelos culturales.

De acuerdo con el constructivismo, cada usuario comienza el proceso de conceptualización de las matemáticas y la abstracción.

Este primer paso prepara la intervención del docente, que busca sistematizar el conocimiento adquirido, proponer generalizaciones, fórmulas y algoritmos, y analizar teoremas.

Puede seguir buscando relaciones con otras disciplinas no científicas, aplicaciones y enriquecimiento de los contenidos.

Por lo tanto es posible pesar el Teorema de Pitágoras, acceder a vocabulario matemático rodeando conos o lanzando globos esféricos o elípticos, dibujar patrones simétricos, medir la entrada del palacio de las Mil y una noches...

> ***El futuro no le pertenece a nadie. No hay precursor, sólo hay rezagados.***
>
> ***Jean Cocteau***

Depende de nosotros utilizar las lecciones de nuestra historia, nuestras experiencias como niños pequeños, nuestros descubrimientos personales para vivir y hacer que la alegría de las matemáticas viva en un futuro muy cercano.

3 Las facilidades para el sistema escolar

En estos últimos años, la cuestión de la importancia de las habilidades en matemáticas ha ganado peso y presencia. Estas habilidades se consideran ahora necesarias para la autorrealización, la ciudadanía y la inclusión social.

El mundo escolar no puede mantenerse al margen de este debate o evitar cuestionar la forma en que los STEM y las matemáticas se tratan específicamente en la educación formal..

Según Anne Siéty, una psicóloga educativa francesa:

> ***Algunos estudiantes en problemas sufren al ver en matemáticas un tema en el que no están involucrados y que no les concierne..***

Las primeras experiencias de los niños son primordiales, pero los estudiantes frecuentemente teme las matemáticas y algunos modifican su carrera educativa para evitarlas. Diferentes enfoques pueden mejorar sus actitudes para que puedan sentir el sabor del descubrimiento de nuevo y así aumentar el nivel intelectual en matemáticas y abrir nuevas y más satisfactorias posibilidades de aprendizaje.

Según Céline Alvarez, lingüista y autora de Les lois naturelles de l'enfant (Las leyes naturales del niño):

> ***La naturaleza anima a los niños a aprender de la manera más potente posible: dándoles un deseo intrínseco de aprender más. Los niños no necesitan explicaciones formales y maestras. Necesitan vivir y enfrentarse con la continua sucesión de conmociones que esta experiencia en el mundo les ofrecerá.***

Recientemente, hemos visto un cambio en la forma en que enseñamos las matemáticas, asumiendo un enfoque no formal de esta disciplina, con más actividades de investigación y menos ejercicios con un interés poco claro.

Los enfoques y métodos utilizados para descubrir las matemáticas pueden tener un impacto significativo en la forma en que los estudiantes aprenden en el aula, así como en la calidad de su aprendizaje. Pueden mejorar la comprensión de los estudiantes y ayudarlos a conocer las reglas y procedimientos matemáticos. Este método también influye en el placer que obtienen los estudiantes del aprendizaje, tanto en términos cuantitativos como cualitativos.

3.1. ¿En matemáticas, son complementarios el aprendizaje formal y el no formal?

3.1.1. Apoyos necesarios comunes.

Fermat Science

A los niños les gusta aprender si tienen ayuda. Según Céline Alvarez:

> ***Los niños tienen unas herramientas de aprendizaje extremadamente poderosas, pero necesitan... una guía de alguien más avanzado que ellos, que les pueda guiar sobre los elementos importantes que se deben observar y tomar en cuenta para seguir adelante.***

Los métodos de enseñanza pueden, por ejemplo, enfocarse en principios y procesos matemáticos o en la aplicación de las matemáticas en la vida real. Pero también determinan la naturaleza de las interacciones, incluidas las que existen entre el facilitador y todo el grupo de niños, entre el facilitador y cada niño en particular, o entre pequeños grupos de niños.

El facilitador también debe alentar intercambios positivos y la comprensión entre los niños y establecer los límites de un marco estructurado y seguro para que cada niño pueda desarrollar el sentido de ayuda mutua que es natural desde una edad temprana.

También es necesario cambiar la actitud de los adultos y partir del principio según Anne Siéty que:

> ***Todos los estudiantes son inteligentes. Si alguien no ha sido capaz de entender tal o cual punto, es porque una razón imperativa le impidió hacerlo.***

Luego, corresponde a los adultos encontrar las herramientas adecuadas para ayudar al niño a superar los obstáculos. Es por eso que es necesario proponer varios tipos de enfoques para que el niño tenga éxito. Las matemáticas no solo deben basarse en el aprendizaje repetitivo sino en el placer de descubrir la propia inteligencia. El éxito es una motivación poderosa para trabajar más duro.

3.1.2. Aprendizaje no formal y matemáticas divertidas [1]

Fermat Science

Devolver la diversión a las matemáticas o hacer que las matemáticas sean lúdicas no significa hacerlo más simple, reduciendo el nivel. Es sorprendente ver cómo jugar ayuda a asumir nociones complejas. Permite hacer un llamamiento inmediato a las matemáticas e incitar a las personas a profundizar en el estudio de la disciplina y, así, a aceptar las reglas y los aspectos más técnicos con mayor facilidad.

1 Viladot, P.; Stenglen, E.; Fernandez, G. – “From fun science to seductive science” –Spokes #13, nov. 2015

Fermat Science

Las matemáticas lúdicas reemplazan la obligación con la instrucción. Los niños no están obligados a hacer algo; solo tienen que seguir una regla de juego. De acuerdo con Stella Baruk [2], profesora de matemáticas e investigadora en psicología, ellos se dan cuenta rápidamente de que una buena comprensión de las reglas conduce al éxito. Para un estudiante en una situación de aprendizaje jugando, es una cuestión de comprensión, de acuerdo con la etimología de este término: cum prehendere, para llevar consigo. Esta forma de desdramatizar el aprendizaje de las matemáticas nos permite regresar sin dolor a un aprendizaje más formal.

La noción de juego es muy amplia, puede ir desde un juego tradicional, a un truco de magia, a origami, rompecabezas o la construcción de objetos extraños. Jugar es una buena manera de acercarse a las matemáticas.

a. Un ejemplo de taller y juego: el Tangram

Fermat Science
Tangram

El Tangram se puede utilizar para desarrollar el sentido de la observación e introducir a los jóvenes en la geometría de una manera visual.

Los orígenes del juego se remontan al siglo VII en China: la leyenda cuenta que un emperador, admirando una magnífica pieza de loza, se le cayó al suelo accidentalmente y se rompió en siete pedazos. Al tratar de reconstruir el mosaico roto, no lo consiguió y en lugar de eso recreó miles de figuras diferentes. El juego de Tangram no fue importado occidente hasta fines del siglo dieciocho.

Las reglas son simples: después de haber seguido las instrucciones de construcción para crear piezas de Tangram, hay que hacer diversas siluetas que representen personajes, figuras geométricas, animales, letras... Hay un gran número de posibilidades; son unos 2000 modelos geométricos o figurativos más o menos complicados de construir.

El uso que se puede hacer en matemáticas es impresionante.

A partir de una hoja de papel, doblando y cortando las diferentes partes, se pueden obtener, una a una vez, las siete piezas. Este procedimiento permite que cada forma sea analizada y comparada con las anteriores. El profesor puede guiar la observación: preguntar y sugerir. El currículo escolar completo de geometría descriptiva puede ser introducido o verificado en aproximadamente una hora.

También, si se quiere profundizar, otras actividades son posibles para diferentes niveles de la escuela:

- Representar números (tomando la pieza más pequeña como unidad)
- Representar fracciones (tomando el cuadrado original como unidad)
- Construir polígonos convexos con las siete formas (la demostración de por qué solo se pueden hacer 13 polígonos es una actividad muy

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Stella_Baruk

interesante para estudiantes mayores [3])

- Construcción de cuadrados y / o rectángulos con 1 a 7 formas.

Es importante subrayar que todas estas actividades son problemas abiertos, a veces insolubles, a menudo con más de una solución, de modo que se puede abrir una discusión entre los estudiantes, mejorando la comprensión de los conceptos y las habilidades comunicativas.

Fermat Science
Geometría e Historia

b. Otro enfoque: la historia de las matemáticas.

La historia de las matemáticas hace posible comprender ciertas nociones matemáticas al ubicarlas en su contexto. Este enfoque hace que el aprendizaje sea significativo y más rico. En lugar de nociones desapegadas de la vida, ubica a las matemáticas en la evolución de la humanidad.

Usar la historia de las matemáticas también puede convertirse en una buena forma de crear motivación al contar descubrimientos matemáticos como parte de la aventura humana. Esto permite dar a aquellos que los descubren el deseo de comprender mejor, por ejemplo, Tales y la medición de la pirámide, Eratóstenes y la medición de la circunferencia de la Tierra, o el problema de la curva de Brachistochrone, que involucró una docena de los matemáticos más famosos a través de un par de siglos.

3.1.3. Sinergia entre estas formas diferentes de aprendizaje

Las opiniones en educación han evolucionado. Considerando las definiciones de aprendizaje formal y no formal, queda claro que la educación ha de ser un proceso continuo combinando ambos enfoques.

a. ¿Por qué usar estos métodos?

Son las carencias del “sistema escolar clásico” las que han despertado este creciente interés en las formas no formales de aprendizaje como complemento de la escuela. De hecho, este interés se explica por las ventajas del enfoque no formal para el desarrollo socio-económico y sociocultural, especialmente después de los decepcionantes resultados de un modelo escolar cuyo contenido educativo es ambicioso pero no práctico ni concreto, a menudo lejos de la vida cotidiana de los estudiantes. Los costes siguen siendo altos y, por lo tanto, limitan su expansión. Son estas limitaciones de la educación escolar las que hacen necesario usar más y más actividades fuera de la escuela.

b. ¿Cómo puede el aprendizaje no formal complementar las acciones escolares?

En el aprendizaje no formal, los participantes toman parte activa y participan en el proceso de aprendizaje, con consecuencias directas en la información provista. Independientemente del contenido, los conocimientos

3 http://archive.bridgesmathart.org/2012/bridges2012-553.pdf

y las habilidades, el aprendizaje no formal brinda la oportunidad de desarrollar autonomía y participación. En este contexto, la asistencia mutua es esencial. Se basa en la capacidad espontánea del niño para intercambiar con los demás, una tendencia innata que debe desarrollarse para el mayor beneficio de todos. De acuerdo con Céline Alvarez:

> ***Ningún maestro puede competir con la facilidad de transferencia de conocimiento entre niños de diferentes edades: la fascinación de un niño de 5 años por uno de 3 es excepcional, como lo es el entusiasmo espontáneo por ayudar a los niños que lo necesitan.***

Esto implica la introducción de materiales de buena calidad que sean atractivos y capaces de despertar la curiosidad de los niños y hacer que quieran enfrentarse a las dificultades de aprendizaje.

También implica revisar el concepto de error tal como lo definen, entre otros, Agnes Rigny y Anne Siéty. Cometer errores en una fase de experimentación no es un problema. El resultado se examina en relación con el resultado esperado. Si no se llega, el siguiente paso es comprender dónde está el error y comenzar de nuevo a partir de una nueva hipótesis. Este método produce un conocimiento real y duradero, cuando la alternativa es aplicar las reglas impuestas por los adultos, aprendidas sin ser entendidas.

El aprendizaje activo les permite a los estudiantes un conocimiento más profundo de sí mismos, les enseña a analizarse a sí mismos mientras se acostumbran a tomar iniciativas dentro de un grupo y medir sus impactos.

Es este proceso de participación lo que hace de la educación no formal una escuela de ciudadanía formidable. No hay un estándar impuesto, ninguna obligación de responder en un tiempo limitado y ninguna sanción. El desarrollo personal es respetado. El desafío no es obtener una buena nota, actuar y salir, sino disfrutar del descubrimiento, para sentir la satisfacción de superar un obstáculo y acceder al conocimiento.

3.1.4. Alejar el riesgo de desigualdad

Vemos un aumento de escuelas y universidades privadas que satisfacen las necesidades y deseos de los estudiantes privilegiados (y sus padres), mientras que la educación pública sigue siendo esencial para la mayoría de los menos privilegiados. La brecha que puede aumentar entre las escuelas públicas y privadas representa una amenaza para la educación formal y no formal.

Además, para los estudiantes que están socialmente distantes de la cultura, el lenguaje matemático puede ser una fuente de malentendidos, generando fracaso y estrés porque a veces existe una discrepancia entre las matemáticas y la realidad. Si el formalismo matemático se convierte en el elemento esencial del aprendizaje, solo puede reproducir los mecanismos sociales que han convertido a las matemáticas en uno de los principales elementos de selección de clases. Optar por una visión más cercana a la realidad no significa renunciar a un lenguaje correcto o conceptos abstractos, sino mejorar su desarrollo y mostrar su significado y utilidad.

Para eliminar el riesgo de desigualdad, es necesario desarrollar:

- Actividades no formales accesibles para todos y fuera de las escuelas.
- La formación de docentes y mediadores en los diferentes métodos de educación matemática y lenguaje matemático.

3.2. Resultados satisfactorios

3.2.1. Motivación de los estudiantes

El nivel de motivación para aprender matemáticas es un determinante importante del rendimiento estudiantil. En casi la mitad de los países europeos existen estrategias nacionales para aumentar la motivación de los estudiantes.

De hecho, las actitudes positivas hacia las matemáticas y la autoconfianza en el aprendizaje van de la mano con la mejora de los resultados.

La motivación influye en las decisiones sobre la participación en diferentes estudios en los que las matemáticas son una parte importante: las actitudes pueden afectar la educación de los estudiantes y sus opciones de carrera.

La investigación sobre los principales factores que influyen en las actitudes positivas de los estudiantes hacia las matemáticas sugiere que los métodos de enseñanza deben ser estimulantes, diversos y relacionados con la vida cotidiana de los estudiantes. Los enfoques educativos no formales crean las condiciones necesarias para mejorar la motivación y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

3.2.2. Mejora de las calificaciones

La mejora de los resultados no es una meta inmediata, pero se puede pensar que la autoestima y el dominio de más habilidades y herramientas modifican positivamente la aproximación a las matemáticas y mejoran el rendimiento.

3.3 - ¿Cómo coordinar los diferentes métodos educativos?

3.3.1. Aprendizaje no formal en las escuelas

El uso de juegos, materiales prácticos y otras experiencias de enfoque no formal de las matemáticas es bastante factible en clase.

No es solo una cuestión de remediar las dificultades. También se trata de ayudar a los estudiantes a construir y apropiarse del conocimiento matemático mediante la articulación de sesiones “regulares” y sesiones de juego lo más cercanas posible.

El docente tiene que evaluar la evolución de la dinámica y los resultados para organizar las diferentes fases e introducir nuevos temas, desafíos y propuestas.

Las sesiones de juego no son una recompensa después de un “esfuerzo real”, reservada para los más rápidos o los más hábiles. Tienen su propio rol y toda la clase participa en ellas a la vez. Aquí, el objetivo no es jugar, sino aprender a través de la manipulación, dando otro sentido al error, usando nociones concretas para avanzar despacio hacia una mayor abstracción.

Los profesores pueden usar las herramientas que les proporcionan los actores de la cultura matemática y los museos matemáticos o pueden crear ellos mismos talleres y pequeñas exposiciones en el aula.

3.3.2. Actores de cultura matemática y museos de matemáticas

Las experiencias educativas no formales fuera del entorno escolar a menudo son poco conocidas, especialmente porque son obra de organizaciones no gubernamentales o asociaciones locales. Existen estructuras, asociaciones y museos matemáticos en todo el mundo que brindan a las escuelas actividades y herramientas educativas utilizando métodos no formales de educación matemática.

Se puede visitar la base de datos que recoge todas estas organizaciones:

http://www.mathcom.wiki

3.3.3. Una opción política: un ejemplo de propuestas en Francia.

En diciembre de 2014, Najat Vallaud-Belkacem, ministro de Educación de Francia, presenta la “La Stratégie Mathématique“, que pretendía mejorar el nivel de los estudiantes en esta materia. Se anunciaron diez medidas clave en torno a tres ejes principales:

- Programas de matemáticas en sintonía con su tiempo
- Maestros mejor formados para el éxito de sus estudiantes
- Una nueva imagen de las matemáticas

En este último eje, encontramos la Acción 7: La promoción de un ambiente más favorable al aprendizaje. La dimensión lúdica de las matemáticas y el uso de los medios digitales se desarrollarán para motivar más a los estudiantes y para fomentar su autonomía. Se fortalecerá el papel del juego en la enseñanza de las matemáticas, particularmente en la escuela. Detalles del proyecto:

http://www.education.gouv.fr/cid84398/strategie-mathematiques.html

4 Fuera de la escuela. Abriendo mentes.

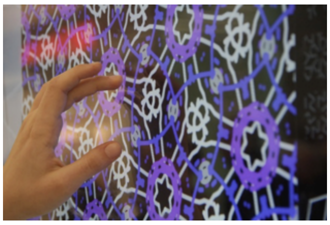
Vivimos en la era de la información. Antes de la existencia de los medios de comunicación (revistas populares, radio, televisión, Internet ...), las fuentes de información y el acceso al conocimiento eran esencialmente dos: libros y profesores expertos. Durante más de dos siglos, las sociedades de todo el mundo han acordado que la educación universal es un objetivo deseable, y la institución escolar es el sistema más eficiente que la sociedad ha inventado para lograr ese objetivo, transmitir conocimiento, valores y formación a partir de una generación a otra. Los maestros y los libros son recursos preciosos y su impacto se maximiza con esta estructura. En la escuela, un pequeño grupo de expertos y un suministro de libros pueden educar a los niños a gran escala. Con la tecnología actual, sin embargo, la información es abundante, omnipresente, instantánea y prácticamente gratuita.

Pero, por supuesto, la información no es conocimiento. Los humanos todavía necesitan digerir la información de una manera ordenada, estructurar las ideas en sus cerebros, aprender a ser críticos, aplicar conceptos y desarrollar habilidades. El ruido y la información inútil obstruyen la aparición de ideas, y la enorme corriente de estímulos compite por la atención y el tiempo de niños y adultos. Por ello, el otro recurso precioso de conocimiento e inteligencia: los profesores expertos, sigue siendo un bien escaso, y las escuelas y universidades son todavía, y probablemente serán por mucho tiempo, la estructura principal para la educación y transmisión del conocimiento a las nuevas generaciones.

Presentaciones para una competición internacional de SURFER, creadas por escolares..

La educación académica debe ser formal y generalista, proporcionar una base sólida para preparar a los estudiantes para los próximos pasos de su educación. Debe ser sistemática y exhaustiva en sus métodos, para que los buenos estudiantes desarrollen las competencias deseadas y obtengan un buen dominio del tema. En matemática, esto significa que la educación formal debe ser vertical, un tema debe consolidarse antes de que el siguiente se construya en la parte superior, y no se debe omitir ningún bloque importante. Si bien esto es innegablemente efectivo en su propósito, necesariamente se pierde el enfoque de una visión más panorámica u horizontal de las matemáticas. Las preguntas relacionadas con la motivación, las aplicaciones, la filosofía de las matemáticas, las tendencias actuales, el desarrollo histórico, etc., no siempre se tratan adecuadamente en el esquema vertical. Sin embargo, estos aspectos también deberían ser parte de la cultura y la alfabetización de ciudadanos bien formados. Un entorno no formal, fuera de la escuela, puede mejorar esta situación dando una visión horizontal complementaria, utilizando todos los recursos disponibles en la actualidad. Entre los recursos, el componente humano de comunicadores matemáticos, facilitadores en exposiciones, que posiblemente sean los mismos profesores que también participan en la educación formal, no debe olvidarse. Discutiremos, con profusión de ejemplos, algunos de los aspectos de las matemáticas que pueden tratarse en un contexto no formal.

4.1. Abstracción.



El programa Morenaments permite dibujar mosaicos usando los 17 grupos de simetría del plano.

Una idea fundamental en matemáticas es la abstracción. No solo como antónimo de “concreto”, sino en cuanto a la extracción de un principio fundamental que gobierna el objeto de estudio. Este principio fundamental a menudo se comparte con otros objetos que no estarían relacionados a primera vista. Utilizaremos el concepto de simetría, que se explota ampliamente en las exposiciones de matemáticas, como ejemplo para describir los diferentes niveles de abstracción y cómo se pueden abordar dentro y fuera de la escuela.

La simetría surge en patrones de repetición, en flores, animales y otros fenómenos naturales, en cristales y química, en artes como la pintura y la escultura, en muchas obras musicales, en innumerables juegos y rompecabezas... Muchos museos de matemáticas e incluso parques de atracciones y otras instalaciones recreativas han desarrollado exhibiciones con un enfoque matemático alrededor de espejos, caleidoscopios y otros juegos ópticos [1]. Con los caleidoscopios podemos generar una infinidad de imágenes que copian un objeto por reflexión en los espejos. Sin embargo, todas estas imágenes comparten la misma estructura, las mismas simetrías, que están determinadas por las posiciones de los espejos y no por el objeto reflejado.

Algunas exhibiciones utilizan software [2] que permiten generar los 17 embaldosados bi-periódicos del plano mediante traslaciones, rotaciones y reflexiones de cualquier dibujo realizado por el usuario. Nuevamente, las posibilidades del dibujo son infinitas, pero la estructura de las simetrías puede ser solo una de 17 posibles [3]. Las exposiciones generalmente incluyen módulos relacionados con poliedros, donde también se presenta la idea de simetría.

La simetría se presenta a menudo como un concepto geométrico, pero desde un punto de vista matemático, se puede describir con la idea más fundamental del grupo como un concepto algebraico. El concepto de grupo es bastante avanzado, no por la dificultad de su definición, sino por la abstracción necesaria para imaginar y manipular esta estructura algebraica. Los grupos se presentan generalmente en un curso de primer o segundo año de álgebra básica en la universidad, para estudiantes de matemáticas y ciencias. Después de la definición y los primeros ejemplos, uno avanza a ravés de teoremas y pruebas como el teorema de Lagrange para el orden de un elemento, o la clasificación de grupos abelianos, y uno

1 Como el Museu de Matemàtiques de Catalunya, Matemilano, Le labosaïque, Mathematikum, y muchos otros..

2 Por ejemplo Morenaments, GeCla o iOrnaments..

3 Hay una elegante demostración de que solo existen 17 de estos grupos utilizando topología, orbifolds y la característica de Euler. Los elementos de esta demostración se muestran al público en general en GeCla, de la asociación Atractor (ver también el DVD Symmetry – la visión dinámica de esta asociación). Este tema no se suele tratar en la escuela y ni siquiera en cursos generales de matemáticas en la universidad, solo en algunos cursos especializados en topología geométrica.

aprende a manipular y deducir propiedades sobre estas estructuras. Esto es, por supuesto, un aprendizaje formal de matemáticas avanzadas, y se puede aceptar fácilmente que esto es solo para personas que buscan una educación superior en matemáticas.

El punto crucial aquí es que la idea de un grupo, una estructura de elementos que pueden combinarse para producir nuevos elementos con propiedades muy básicas, es un concepto accesible para cualquier persona con un poco de curiosidad, casi independientemente de su educación matemática. . La estructura de simetría de un caleidoscopio, un mosaico plano o un poliedro regular puede identificarse como un grupo particular, clasificado y etiquetado, y este grupo rige las similitudes de ese caleidoscopio o mosaico particular, pero otro caleidoscopio o mosaico puede ser intrínsecamente diferente porque su grupo de simetrías es diferente.

Esta idea puede transmitirse sin la necesidad de usar la palabra “grupo” ni establecer su definición (aunque es tarea del facilitador identificar los antecedentes del público y decidir cuánta información exponer). El tema de las simetrías del plano aparece en algunos libros de texto escolares, y los estudiantes de química pueden haber visto la estructura de los cristales en la escuela secundaria y estar familiarizados con las clasificaciones cristalográficas. El mensaje en un contexto fuera de la escuela es que la simetría no depende de la química, el arte o los poliedros, sino que es un marco abstracto que explica todos estos fenómenos.

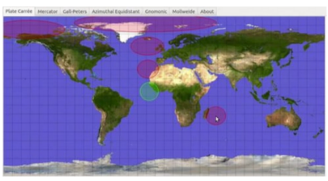
4.2. Modelización.

Galería matemática en el London Science Museum.

La idea de modelización es en cierto sentido dual a la de abstracción. La modelización es la aplicación: el uso práctico de las matemáticas para resolver, o al menos comprender, un problema concreto. Los maestros pueden encontrar la pregunta: “¿para qué sirve esto?” Irritante. Las matemáticas no son solo una ciencia instrumental y pueden practicarse solo para la búsqueda del conocimiento, pero esta es una pregunta legítima que merece una respuesta argumentada. Las matemáticas aplicadas son casi un campo en sí mismas y cuentan como más de la mitad de la producción matemática en la investigación actual. Por supuesto, uno podría defender que la totalidad de la física es matemática aplicada, pero, para corregir las definiciones, la matemática aplicada es el uso de matemática no trivial en un problema no trivial, que generalmente requiere la colaboración de expertos en ambas matemáticas y el campo en cuestión.

Lámpara y modelo 3D mostrando la proyección estereográfica por Henry Segerman.

Aprender sobre las matemáticas aplicadas y la modelización es enriquecedor desde el punto de vista cultural, da una sensación de interconexión entre el conocimiento humano, también es motivador para aprender un tema y desata la libertad de las matemáticas como lenguaje. La educación formal incluye física, química, tecnología y otras ciencias, sin embargo, hay muchos ejemplos de modelización en estas áreas que hacen mediciones de campo, cientos de limitaciones físicas, etc. Excluidos o descuidados por el plan de estudios de matemáticas más clásico, este campo de estudio es muy fructífero para una discusión fuera de la escuela.



La esfera de la tierra, primer premio de la competición de exposiciones Mathematics of Planet Earth de 2013.

La iniciativa Matemáticas del Planeta Tierra [4] se enfoca a cualquier fenómeno relacionado con nuestro planeta donde las matemáticas sean una herramienta de ayuda o solución.

Tales fenómenos pueden ser físicos, naturales, humanos o de cualquier otro tipo. Por ejemplo, la cartografía es una ciencia que se desarrolló a partir de la necesidad de dibujar mapas de regiones de la Tierra. Como ciencia tiene múltiples ramas y temas de interés. Uno es cómo representar en un plano la superficie curva de la Tierra, pero también cómo medir la Tierra (geodesia). Se desencadena el problema de representar una superficie esférica en un plano, lo que se llama un mapa proyección. Se puede pensar en una multitud de ingeniosas representaciones planas de una esfera, dibujando las coordenadas, proyectando líneas imaginarias en planos, y cilindros... y finalmente se necesitan herramientas para analizar objetivamente las diferentes proyecciones, para definir y medir la distorsión, y para evaluar la utilidad del mapa para problemas de la vida real, como encontrar rutas entre puntos [5]. La cartografía y la geodésica fueron históricamente un punto de partida del área matemática de la geometría diferencial. Olvidar algunas restricciones físicas para modelar y desarrollar una teoría a partir de este modelo es abstracción.

La modelización es también un marco perfecto para introducir algunas áreas de la matemática, por ejemplo ecuaciones diferenciales. Si bien la teoría para resolver ecuaciones con funciones y derivadas desconocidas (tanto totales como parciales) es un tema avanzado, la idea de una función que describe una magnitud física y las restricciones que implican algunas variaciones de esta magnitud es intuitiva y accesible. En las Matemáticas del Planeta Tierra hay ejemplos como los modelos del movimiento del hielo en un glaciar, los modelos del viento y las partículas suspendidas en la atmósfera, los modelos de las corrientes marinas y los tsunamis, etc [6].

También es notable que las matemáticas aplicadas y los ejemplos de modelización se adapten perfectamente a las presentaciones históricas de las matemáticas. La historia de las matemáticas (antiguas y recientes) está conformada por los dominios a los que se refiere. Ejemplos de este despliegue histórico son la Winton Gallery en el London Science Museum o las secciones de cálculo en el Musée des Arts et Métiers en París. Ambos museos aprovechan sus colecciones patrimoniales para mostrar áreas donde las matemáticas han jugado un papel central.

Construcciones con el Polydron en el MMACA.

4.3. Creatividad.

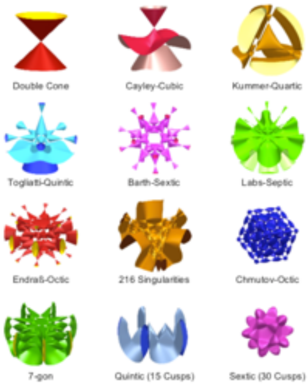
Un gran problema en el enfoque formal para el aprendizaje de las matemáticas es la falta de libertad para crear algo utilizando el lenguaje que brindan las matemáticas. Las matemáticas se presentan como una herra-

4 El nombre hace referencia tanto a una iniciativa de investigación (www.mpe2013.org) como a una exposición relacionada dirigida por IMAGINARY (http://imaginary.org/exhibition/mathematics-of-planet-earth)..

5 Ver el módulo The Sphere of the Earth en imaginary.org

6 The Future of Glaciers, Dune Ash, and TsunaMath respectivamente, en imaginary.org

GeCla, Generación and Clasificación de embaldosados del plano, de Atractor.



Superficies algebraicas con record de singularidades, en SURFER.

mienta de resolución para problemas predefinidos, y no como una herramienta de creación. Si bien la investigación de nuevas matemáticas puede ser un proceso creativo, la investigación está muy lejos de la experiencia del estudiante y del público en general. Por lo tanto, es importante desarrollar herramientas y actividades que permitan la expresión creativa del usuario, utilizando el lenguaje matemático.

La creatividad requiere un final abierto de la actividad, no hay creatividad si el resultado está predefinido. Los módulos basados en bloques de construcción brindan un espacio tradicional para la creatividad, especialmente para el público más joven. Los bloques poliédricos de construcción son comunes en los museos de matemáticas (disponibles comercialmente [7] o de fabricación casera). Estos bloques permiten conexiones y formas múltiples, pero también tienen restricciones geométricas que hacen que la creación sea más desafiante. Los bloques grandes y blandos también son divertidos para los niños, y se les puede desafiar a construir puentes, torres, empaquetaduras u otras estructuras.

Dibujar es otra actividad inherentemente creativa. El software para dibujar teselaciones simétricas, como se mencionó anteriormente, mezcla la creatividad del dibujo con la multiplicación “mágica” de las figuras dibujadas, creando bonitos patrones. La asociación Atractor (Portugal) ha establecido competiciones inter-escolares [8] utilizando su software GeCla (Generación y Clasificación) para las construcciones planas, donde cada concursante tiene que dibujar un patrón y adivinar el grupo de simetría de los dibujos de los demás.

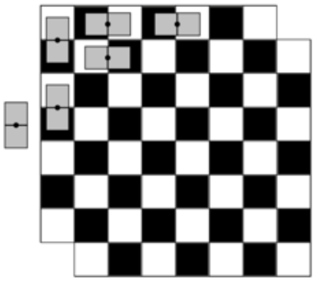
SURFER [9] es un software interactivo, parte de las exposiciones de IMAGINARY, para visualizar superficies algebraicas, es decir, superficies en el espacio tridimensional definidas por una ecuación polinómica en las tres variables espaciales x, y, z. El usuario escribe o selecciona ecuaciones como entrada, y obtiene imágenes de superficies como salida. Las posibilidades para las ecuaciones son infinitas, pero a través de un tutorial y la experimentación, el usuario desarrolla una intuición sobre cómo los cambios en las fórmulas afectan a la superficie correspondiente. En definitiva, esta es una herramienta creada para usar un lenguaje simbólico y matemático de una manera creativa. SURFER se ha utilizado en competiciones [10], donde se les pide a los participantes que creen la imagen más bella, atractiva o interesante, que es evaluada por un jurado.

Finalmente, el máximo exponente de la creatividad es convertir las matemáticas en una forma de arte. El arte matemático tiene una enorme tradición, desde las herramientas de la perspectiva, la proporción áurea, o los mosaicos árabes, hasta el arte de M. C. Escher, el cubismo y los pintores modernos, o las esculturas geométricas. Hoy en día, los artistas mate-

7 Como Polydron, Zometool, MathLink...
8 http://www.atractor.pt/mat/GeCla/Competicao-_en.html
9 Disponible en https://imaginary.org/program/surfer
10 https://imaginary.org/search/node/surfer%20competition

máticos son una gran comunidad, con organizaciones [11], plataformas [12], conferencias [13], y competiciones [14]. Para el público y los estudiantes, la conexión entre las matemáticas y el arte no es solo una fuente de satisfacción estética, sino que también refuerza la sensación de que las ciencias y las artes no son campos opuestos, sino diversos resultados de mentes creativas.

4.4. Ejercicios mentales.



El problema del dominó y el tablero recortado.

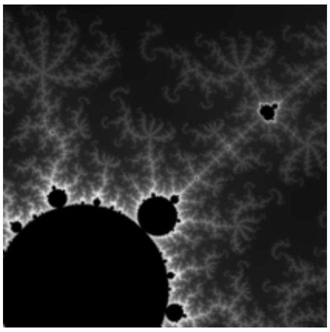
Las ferias de matemáticas, exposiciones y museos tienden a tener una parte importante de su colección dedicada a juegos, rompecabezas y acertijos. Esto hace que muchas de estas exhibiciones sean un campo de entrenamiento cerebral para los visitantes, que es en sí mismo un ejercicio bastante positivo. La educación no es solo transmisión de conocimiento, sino también capacitación y adquisición de competencias. Los juegos y acertijos ayudan a desarrollar habilidades estratégicas y de resolución de problemas. También desarrollan razonamiento y pensamiento lógico.

Un juego clásico es averiguar si es posible cubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó (sí, lo es), y luego preguntar si es posible si eliminamos un cuadrado del tablero (no lo es, hay un número impar de casillas), y luego si es posible si eliminamos dos cuadrados diagonalmente opuestos (de nuevo es imposible ya que hay un número diferente de cuadrados en blanco y negro y cada ficha de dominó cubre uno de cada color). En el primer caso, la solución es afirmativa porque podemos construir una solución. En el segundo caso, es imposible porque no se cumple una condición necesaria. En el tercer caso, se cumple la condición anterior, pero aún es imposible debido a otra condición necesaria (podría ser más desafiante si el tablero original es solo una cuadrícula de 8x8 sin colores). Para un público que no está familiarizado con las pruebas matemáticas rigurosas, como los niños (y muchos adultos), es un desafío hacer un razonamiento lógico para demostrar un resultado positivo o negativo. Podríamos ir más allá preguntando cuál es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución en un tablero de ajedrez con cuadrados eliminados.

Los rompecabezas también pueden jugar un papel en la valorización del conocimiento del visitante. El uso de este conocimiento de los visitantes los hace más comprometidos y satisfechos con su posición de ventaja intelectual. Resolver un rompecabezas es enriquecedor. En cualquier exposición de matemática, se puede observar un fenómeno fascinante: los niños que logran resolver un rompecabezas corren para contarles a sus padres, hermanos u otros niños. Se sienten en posesión de un conocimiento que es satisfactorio para compartir y para estar orgullosos. Uno de los rompecabezas más famosos y difíciles es el cubo de Rubik. Cualquiera

11 e.g. the European Society for the Mathematics and Arts http://www.math-art.eu/
12 e.g. IMAGINARY
13 e.g. Bridges conference http://bridgesmathart.org/
14 e.g. Math Creations, https://imaginary.org/project/math-creations. Ver también Violet, Wagner, Eremenko "Math Creations - A math-art competition" Proceedings of the Bridges conference 2017.

que pueda resolverlo gana un poco de respeto por su habilidad. Esto se debe principalmente al hecho de que la solución no puede revelarse como un simple truco, sino que se ve forzado a pasar una buena cantidad de tiempo para aprender el algoritmo de solución, incluso con una guía para resolverlo. En la década de los 80, sin Internet y el cubo de Rubik como novedad, máximo reto era resolver el cubo. En las próximas décadas, aparecieron nuevos desafíos, tales como "speedcubing" para resolverlo en el menor tiempo posible. Hoy en día, con récords mundiales de velocidad cercanos al límite humano, la atención se traslada a las variaciones del rompecabezas, con diferentes estructuras, desafiando las matemáticas y los límites de la ingeniería. El cubo de Rubik es un gran juguete matemático, puede llevar a aprender (¡e investigar!) teoría de grupos, desarrollar habilidades lógicas y visuales, y sigue siendo un juguete para niños con el que todos pueden jugar [15].



Detalle del fractal de Mandelbrot

El ejercicio mental esencial es fomentar la investigación personal. No solo buscando una solución a un problema, sino descubriendo el problema mismo en el contexto dado. Este proceso puede ser seguramente guiado por un mediador, pero es esencial dar libertad y tiempo para explorar. Uno de esos contextos es la pizarra esférica [16], que consiste en una esfera sobre la que podemos dibujar, y un compás y una regla curva para dibujar "líneas rectas" (propiamente, geodésicas). Un lienzo para dibujar siempre despierta la creatividad, y los visitantes intentarán dibujar figuras, posiblemente países que se asemejen a la Tierra. Si se enfrenta con la pregunta "¿puedes dibujar un cuadrado?", comenzarán a luchar contra los problemas del espacio curvado. Es posible dibujar un cuadrilátero con lados iguales, pero no ángulos rectos. Esta información no necesita ser proporcionada al principio, sino que puede descubrirse mediante experimentación. O, por el contrario, puede intuirse después de varios intentos, pero no estar seguro sin un examen más profundo. El hecho de que haya posibilidades ilimitadas de intentos fuerza a ser creativo para elaborar una estrategia para comprender el problema, y siempre queda la sensación de que la experiencia no termina con la respuesta a la pregunta propuesta. El objetivo final no es dibujar un cuadrado. ¿Qué pasa con los triángulos o pentágonos? ¿Cómo dibujar un poliedro sobre la esfera...?

4.5. Descubriendo campos.

Muchos campos de conocimiento no están presentes en la educación formal, simplemente porque no hay tiempo para cubrir todo en la escuela. Muchos campos de la matemática siguen siendo desconocidos para el público en general, aunque, en muchos casos, conocer su existencia es accesible y enriquecedor. Por supuesto, las meras nociones introductorias no sustituyen los cursos adecuados, pero algunos enfoques no formales sirven para descubrir campos que son desconocidos o poco difundidos.

15 Ver, por ejemplo, el canal de Mathologer en YouTube para contenido matemático sobre el cubo. https://www.youtube.com/results?search_query=mathologer+rubik

16 Existen pizarras convencionales esféricas, pero una versión moderna muy útil es la Lénárt Sphere (http://lenartsphere.com/), que es transparente.

Además, a menudo hay referencias culturales populares que pueden atrapar la atención del público y servir como punto de partida para la presentación de un concepto.

Los fractales son uno de estos temas. Muchas personas han oído hablar de ellos, tal vez les suena el conjunto de Mandelbrot y han visto imágenes psicodélicas en Internet. Este tipo de público está previamente motivado por lo que hay oportunidad para proporcionar más información, y hacer el proceso de aprendizaje entretenido y agradable.

Los fractales están ligados a la noción de infinito, porque su construcción requiere un proceso iterativo interminable y un paso al límite. La propiedad de auto-similitud es intuitiva y tiene soporte en la naturaleza, a veces más evidente (árboles, hojas de helecho, tipos de brócoli), a veces más revelador (¿cuál es la longitud de la costa de Gran Bretaña? [17]). La idea del límite de un proceso se puede explorar con las curvas de Peano y Hilbert (que llenan el plano y el espacio respectivamente) o el copo de nieve de von Koch. Las aproximaciones finitas se pueden construir físicamente, y se pueden usar simulaciones por ordenador para explorarlas virtualmente [18]. También podemos explorar las nociones de dimensión fractal y el proceso iterativo es también la base para hablar sobre el caos.

Los números complejos y la dinámica compleja también son esenciales para comprender los fractales en profundidad. Desafortunadamente, los números complejos no siempre son un tema contemplado en la educación no universitaria. Sin embargo, la idea de operaciones algebraicas entre puntos del plano (o pares de coordenadas, o números equivalentemente complejos) es accesible incluso si el público no tiene conocimiento previo de números complejos. A partir de este punto, uno puede sumergirse en complejas funciones variables y análisis complejos. El salto es cualitativamente enorme, y el análisis complejo a menudo se enseña en un curso universitario de matemáticas de segundo o tercer año. Sin embargo, la idea del tema puede transmitirse al público en general. Una función variable compleja (holomórfica) pasa a ser conforme, lo que significa que conserva ángulos. Esta es una noción que se puede experimentar con la ayuda del software apropiado [19], Una imagen (que puede ser estática o puede ser una entrada de video desde una cámara) se presenta después de una transformación holomórfica, y se pueden comprobar los ángulos antes y después. También se pueden ver los ceros y polos de las funciones meromorfas y jugar con la geometría compleja. El siguiente paso es iterar una función (componerla consigo misma varias veces) para llegar a conjuntos de Julia y Mandelbrot.

17 Esta pregunta se cita de B. Mandelbrot. Quiere decir que si no hay una buena definición de longitud, ya que depende de nuestra consideración de unidad. Si consideramos los detalles cada vez más pequeños, la medida crece hasta el infinito sugiriendo la idea de la dimensión fractal..

18 Ver, por ejempl, algunos Applets de Cinderella (https://imaginary.org/program/cinderella-applets)

19 Ver la Conformal Webcam de Christian Mercat (https://math.univ-lyon1.fr/~mercat/CindyJS/examples/cindygl/22_webcamconf.html)

Este viaje por análisis complejos y fractales necesita muy probablemente un mediador con la capacidad de detener, avanzar y saltar partes, pero en buenas condiciones esta es una exposición viable para adolescentes y público en general. El escenario ideal sería una charla interactiva de unos 20-25 minutos en un museo o en una actividad extraescolar, utilizando el software y tal vez algunos objetos (escultura de una curva de Hilbert, un trozo de brócoli...). Una conversación más clásica también es una opción si la audiencia es demasiado grande, pero es importante que los asistentes tengan la oportunidad de tocar e interactuar con una función holomórfica o con un fractal, cambiando parámetros y descubriendo detalles por sí mismos.

4.6. Perlas de matemáticas.

En matemáticas hay un sinfín de ejemplos de pequeñas historias, tal vez un teorema, tal vez una conjetura, tal vez solo algunos elementos de un campo de estudio; que se pueden explicar sin contexto y se pueden entender fácilmente, y siempre contienen un resultado sorprendente. Estas historias, que llamaremos “perlas”, son deliciosas para discusiones casuales sobre las matemáticas, son atractivas y, al mismo tiempo, suficientemente limitadas. Estas perlas parecen historias aisladas, pero cuando se explican con más detalle, se vuelven más enriquecedoras y más conectadas. Por su naturaleza, esta plétora de historias no encaja en el aprendizaje formal, y pero en cambio son perfectas para la popularización de las matemáticas. Veamos algunos ejemplos.

La paradoja de Bannach-Tarski es un teorema que establece que es posible cortar una esfera en cinco piezas y reorganizarlas en dos esferas, idénticas en tamaño a la original. Le llamamos paradoja porque es contra intuitivo y contradice la propiedad aditiva del volumen, pero al mismo tiempo es un teorema comprobado y es absolutamente cierto. La explicación tiene que ver con la teoría de la medida y el hecho de que no todos los conjuntos de puntos que se pueden definir pueden tener asignado un volumen, no son mesurables. Las piezas en las que se deben cortar las esferas son tan intrincadas que no se les puede asignar un volumen. Pero para esta discusión, el punto interesante es que la historia se puede contar en pocas palabras, y uno puede apelar a la autoridad de la frase “es una verdad matemática” para asombrar a la audiencia y, con suerte, despertar la curiosidad y ganas de entender el teorema con más profundidad [20].

Otra perla es la suma de todos los números naturales. El resultado indica que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... = -1/12. Esta es una afirmación asombrosa y toda persona se negará a creerla a primera vista. Pero, de nuevo, es matemáticamente cierto. La explicación es que la suma originalmente solo está definida para dos, tres o cualquier número finito de sumandos. Si queremos hacer sumas infinitas, necesitamos extender la definición de suma, para que podamos escribir cosas como 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 2.

20 Ver, por ejemplo, el vídeo de Vsauce (https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA)

Esta última adición, o serie, es la paradoja de Zenón y fue asombrosa para los griegos y para toda la humanidad durante siglos, pero hoy en día es aceptada y utilizada en muchas áreas de las matemáticas. Se basa en una distinción en series convergentes y divergentes, y el primero admite un valor numérico mientras que el segundo no. De la misma manera, en algunas áreas como la teoría de cuerdas en física, puede ser necesario asignar un valor numérico a series que se consideraron divergentes, y en el caso de la suma de todos los números naturales, el valor coherente con la teoría es menos una duodécima. Esta historia dice que uno puede ir más allá de las reglas, y la teoría siempre se pone a prueba. Las cosas descartadas o consideradas como imposibles siempre deben reconsiderarse [21].

Muchas de estas perlas se pueden utilizar para sorprender e intrigar al público. El formato de estas historias suele ser libros cortos o artículos de popularización de las matemáticas y, más recientemente, sitios de Internet como YouTube. El video de divulgación de las matemáticas es realmente un recurso floreciente. La duración relativamente corta de los videos (a menudo menos de 15 minutos) y el estilo cercano e informal han hecho de este un formato de éxito y el terreno propicio para una creciente comunidad de comunicadores matemáticos. Todavía existen barreras lingüísticas y geográficas, pero es un problema menor para las generaciones más jóvenes. Los temas se reformulan entre los autores con diferentes puntos de vista, a menudo reconociendo una "respuesta", y en diferentes lenguajes para diferentes públicos. El carácter audiovisual del video permite visualizaciones matemáticas, animaciones, diagramas, caricaturas, etc., que representan una mejora cualitativa sobre libros de texto e imágenes. La técnica y las habilidades de los autores son, en algunos casos, tan profesionales como las producciones televisivas, sin las restricciones de tiempo y audiencia de la televisión.


SURFER en una exposición.

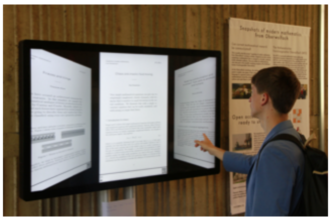
La comunicación matemática en formatos cortos, ya sea en video o en el artículo más tradicional, es un gran desafío para la didáctica. Las limitaciones de tiempo, atención y antecedentes hacen que la capacidad de síntesis, los recursos visuales y el atractivo del autor lleguen al límite. Las "perlas" a menudo son las mejores introducciones a muchos temas, cubiertas con una mezcla de entretenimiento y conocimiento matemático. En ese sentido, el valor educativo está fuera de duda, y estos recursos deberían ser explotados por los docentes y los educadores matemáticos.

4.7. Límite del conocimiento.

Las matemáticas no son una ciencia terminada. Hay y siempre habrá preguntas en las que no conocemos la respuesta, problemas no resueltos y campos enteros por descubrir. Esto es difícil de transmitir al público, ya que los avances no son evidentes para la sociedad como es el caso

21 Ver vídeos de Numberphile (https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww, https://www.youtube.com/watch?v=0Oazb7IWzbA&t=36s), from Mathologer (https://www.youtube.com/watch?v=jcKRGpMiVTw) or from 3brown1blue (https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjbwqlYw&t=8s).

de muchas tecnologías (comunicaciones, investigación médica...), ni se pueden describir fácilmente apelando a un objetivo claro como en la física (descubrir una nueva partícula utilizando un laboratorio acelerador, porque queremos entender la materia). Las matemáticas han sido durante mucho tiempo un caso raro en el que la comunicación de la investigación actual se consideraba un esfuerzo inútil. Es deber de los investigadores publicar y comunicar sus avances a sus colegas matemáticos, pero también es su deber, o al menos el deber de la comunidad investigadora en su conjunto, comunicarse también con los no especialistas. Afortunadamente, esta tendencia ha cambiado en la última década con muchos proyectos en todo el mundo. La conexión entre la investigación y el público se puede hacer por los propios investigadores o por un número cada vez mayor de comunicadores profesionales de matemáticas y organizaciones de divulgación de las matemáticas.



"Snapshots of current mathematics",mostrado en una estación interactiva.

El Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach es un centro de investigación de Alemania. En 2008 comenzó un proyecto de comunicación matemática que más tarde condujo a la organización IMAGINARY. Muchos de los materiales de IMAGINARY son producidas por matemáticos profesionales que visibilizan y popularizan temas de su investigación. Uno de estos materiales es el SURFER, ya mencionado, que visualiza superficies algebraicas. Además de la posibilidad de explorar superficies creativas creadas por el usuario, el programa ofrece un recorrido por la teoría de las singularidades. Las singularidades son puntos donde una superficie algebraica no es lisa, como vértices o bordes. Estos puntos son raros de encontrar, y por lo tanto es un campo de estudio interesante. Para polinomios de grado bajo (hasta 6), hay teoremas que encuentran el número máximo de puntos singulares para una superficie del grado dado. SURFER proporciona la visualización de estas superficies que llevan el nombre de los matemáticos que las descubrieron, en muchos casos en los últimos años. Para grados más altos (7 en adelante), todavía no hay un resultado definitivo para este problema de encontrar las máximas singularidades posibles. Estos son problemas no resueltos, y actualmente están siendo investigados. Por supuesto, se necesita algo más que SURFER para descubrir un nuevo teorema, pero este programa da una idea más cercana de lo que serían estos nuevos teoremas, y despierta la imaginación y la sensación de que cualquiera podría escribir un polinomio que establezca un nuevo récord mundial de singularidades.

Otro proyecto del mismo instituto, "Snapshots of current mathematics from Oberwolfach" [22] produce folletos cortos editados para el público en general, que dan una idea de los temas discutidos en los seminarios de Oberwolfach. Estos folletos tienen entre 8 y 10 páginas de tamaño A5 y se pueden volver a imprimir y distribuir libremente en cualquier evento de comunicación matemática, o pueden traducirse y volver a publicarse en revistas matemáticas generales.

22 Textos en https://imaginary.org/snapshots, también una sección de la exposición itinerante https://imaginary.org/program/snapshots-slider

Erasmus+

Las plataformas de internet como la de Images des Maths [1] (en francés) son un punto de encuentro para comunicadores matemáticos. Las películas y los videos también son una tendencia en la comunicación matemática, no solo en el formato corto, como ya se mencionó (como YouTube), sino también en largometrajes como Dimensions or Chaos [2] que ofrecen introducciones accesibles a temas de investigación actuales en matemáticas.

La comunicación matemática ya está creciendo de un campo emergente a un dominio consolidado. Más de 50 museos de matemáticas de todo el mundo [3], docenas de conferencias [4], una creciente comunidad de profesionales de la comunicación matemática respaldan este hecho. IMAGINARY promueve y proporciona servicios a esta comunidad (WikiMathCom [5], Math Communication Network [6], IMAGINARY Conferences [7]) y ha promovido iniciativas de manera independiente, como muchos canales de Internet, que a menudo son apoyados por instituciones nacionales de investigación. (CNRS, MSRI ...) para alentar la difusión matemática al público. Las organizaciones internacionales como IMU y EMS promueven activamente el alcance matemático para el público en general, con publicaciones, programas públicos (como la competencia de Matemáticas del planeta Tierra) y paneles específicos sobre conferencias de matemática [8].

El papel de la comunicación matemática como un modo de aprendizaje no formal y su conexión con la educación formal proporcionada en las escuelas y universidades sigue siendo un aspecto que se está desarrollando, esperando una sinergia entre las dos caras de la misma moneda: lograr una mejor educación y una sociedad más ilustrada.

---

1 http://images.math.cnrs.fr/?lang=fr

2 Ambos de E. Ghys, J. Leys y A. Alvarez http://www.dimensions-math.org/, http://www.chaos-math.org/es

3 http://www.mathcom.wiki/index.php?title=Math_Museums

4 http://www.mathcom.wiki/index.php?title=Conferences

5 http://www.mathcom.wiki

6 http://imaginary.org/network

7 http://ic16.imaginary.org/

8 Por ejemplo en el International Congress of Mathematicians ICM (Seoul 2014), https://imaginary.org/event/imaginary-panel-mathematics-communication-for-the-future-a-vision-slam o en el 7th European Congress of Mathematics 7ECM (Berlin 2016) https://imaginary.org/event/ems-session-on-public-awareness-of-mathematics-at-7ecm

5 Un método inclusivo

Una nueva visión de los museos ha ido creciendo como respuesta a la idea de que los museos son solo un lugar de conservación. Una visión del museo como un paraíso cultural, inclusivo y vivo, un lugar que puede convertirse en punto de encuentro abierto al intercambio de experiencias. Esto significa que la accesibilidad de los contenidos a una audiencia lo más amplia posible asume un papel prominente.

Para promover la accesibilidad, primero hay que identificar las barreras que impiden que la audiencia, o una parte específica de la audiencia, disfruten plenamente del museo, y trabajar para derribarlas.

Esta visión es particularmente pertinente en relación con los museos de ciencias interactivas. Somos, por naturaleza, totalmente dependientes de la participación activa de la audiencia y nuestro mayor objetivo a superar es la transmisión de conceptos que tradicionalmente dependen del lenguaje técnico específico. Comunicar de manera efectiva estos conceptos es parte de los objetivos centrales del museo.

Por lo tanto, un museo como el Giardino di Archimede que apunta desde el nacimiento a comunicar y difundir las matemáticas en todas sus formas y relaciones con otras disciplinas, tanto dentro como fuera del museo, tiene por naturaleza una connotación inclusiva.

Una discusión ulterior sobre la inclusión requiere una consideración del concepto de “barrera” en un sentido amplio: cualquier aspecto que pueda causar la exclusión de una audiencia específica. Muchos factores están comprendidos, materiales y no. Estas barreras se pueden superar y llevar a la identificación de colectivos para quienes el disfrute del museo es limitado o está excluido. Las razones de la marginación pueden estar relacionadas con una desventaja física o socioeconómica. En el primer grupo podemos encontrar a los discapacitados visuales o auditivos, ancianos o personas con discapacidades específicas. En el segundo grupo podríamos encontrar niños de acogida, convictos, inmigrantes, minorías étnicas con dificultades de integración. El objetivo final de un museo es abrirse a la mayor cantidad posible de público nuevo y amplio.

La integración y coordinación entre sujetos de educación no formal que operan en la misma área permite un salto de calidad y efectividad de las propuestas. En este sentido, el proyecto en inglés “Learning outside Classroom” [1] fue muy interesante; desgraciadamente, se sacrificó por motivos económicos antes de implementarse de manera significativa.

En la misma línea, hay dos experiencias del Giardino di Archimede que

1 https://www.gov.uk/government/publications/learning-outside-the-classroom http://www.lotc.org.uk/wp-content/uploads/2011/03/G1.-LOtC-Manifesto.pdf

Actividades del proyecto WELCOME
Il Giardino d'Archimede.

son ejemplos de buenas prácticas que podrían implementarse, incluso parcialmente, diversos países.

El primer proyecto destinado al desarrollo de prácticas inclusivas se implementó en 2015. Comprende una red de museos locales. Más tarde se desarrolló en un segundo proyecto llamado WELCOME (We Encourage Living Collective Open Museums Experiences).

Ambos proyectos nacieron dentro de un grupo de trabajo formado en el territorio, la ciudad de Florencia, pero muy diverso y heterogéneo en tipo y tema: arte, historia y ciencia; público y privado. El grupo se formó inicialmente como respuesta a una serie de iniciativas promovidas por la Regione Toscana. A pesar de las diferencias, la sinergia resultante apuntaba a objetivos comunes muy concretos que tenían en cuenta la diversidad y la necesidad personales. El grupo de trabajo se constituyó entonces en una red llamada "ArteStoriaScienza - Sistema Coordinato di Musei con Attività di Cooperazione" [2].

El primer proyecto realizado por la Red fue el Museo Bus, que intentaba facilitar la inserción de los museos en el tejido vivo de la ciudad. Persiguió a una audiencia que no puede acceder físicamente a los museos de manera autónoma, tejiendo una red a través de las realidades vecinales. Se crearon una serie de itinerarios temáticos. Estos itinerarios vinculan a cada uno de los museos asociados con una realidad local específica [3]. I enlace era tanto temático como físico: un autobús turístico llevaba a los visitantes de un punto del itinerario al siguiente. Esta primera versión del proyecto, por lo tanto, estaba dirigida a un público que ya tenía un interés cultural, ofreciéndoles la oportunidad de ampliar sus intereses.

Los diferentes itinerarios que organizó el Giardino di Archimede fueron:

INSTITUCIÓN EXTERNA	INSTITUCIÓN MATEMÁTICA	NEXO TEMÁTICO
Central Lechera	Giardino di Archimede	Geometría del empaquetamiento
Istituto Nazionale di Ottica	Giardino di Archimede	Formas geométricas conectadas a la reflexión de la luz
Museo	Giardino di Archimede	La geometría de las burbujas de jabón
Dipartimento di Matematica e Informatica	Giardino di Archimede	Liber Abaci y el sistema de numeración indo-arábico.

Entre los itinerarios diferentes vinculados con otros museos se encontraban visitas a una fundición, una fábrica textil, un taller de cerámica, una empresa de café, una fábrica de cristal, un vivero de plantas antiguas, la empresa de alumbrado público, todos conectados a un museo concreto.

2 Los miembros de esta red son los ocho museos de Florencia: Fondazione Casa Buonarroti, FirST-Firenze Fondazione Scienza e Tecnica, Museo Galileo, Museo di Storia Naturale dell'Università di Firenze, Museo Fiorentino di Preistoria "P. Graziosi", Museo Marino Marini, Il Giardino di Archimede–Un Museo per la Matematica, Museo Horne.

3 Este proyecto ya se había iniciado por los otros museos de la región. El Giardino di Archimede entra el 2016. Este proyecto fue cofinanciado `por la Regione Toscana.

Este proyecto contenía algunos viajes para grupos específicos que, por diversas razones, podrían no tener la iniciativa o la capacidad de planificar una visita al museo. Tanto los viajes como las actividades dentro de los museos se organizaron a medida. Entre estos grupos había algunos niños de un establecimiento para menores en los suburbios de Florencia, algunos de una comunidad del área metropolitana de Roma, centros de ancianos, centros de rehabilitación e instituciones para personas con discapacidad auditiva.

Estas primeras experiencias muy positivas animaron a todos los miembros a desarrollar el proyecto para la inclusión en el siguiente proyecto WELCOME, que recibió fondos públicos y apoyo en 2016, y constituyó un puntal para la accesibilidad a la cultura, haciendo de los museos un lugar para la inclusión y la integración. Concretamente, el objetivo del proyecto era aumentar el uso del museo por parte del público desfavorecido mediante la implementación de diversas estrategias de participación y fortalecimiento de los servicios para los visitantes. Esto se logró con la especialización de la creación de itinerarios dedicados, eligiendo nuevos temas y enfoques y nuevos tipos de materiales para ser utilizados en visitas y actividades educativas.

Actividades del proyecto [4]

Tipos de desventajas	Ancianos, minusválidos, inmigrantes, niños de acogida, pacientes de hospitales, minusvalías físicas o mentales específicas (pacientes con discapacidad auditiva o visual, autistas, con Alzheimer)
Acciones en el museo	Visitas ad hoc, transporte gratuito, diseño y creación de recursos y materiales específicos
Acciones fuera del museo	Reuniones preliminares para la preparación de visitas, talleres y actividades en las estructuras de acogida.

Con el fin de identificar las necesidades específicas de cada grupo y, por lo tanto, organizar las actividades en consecuencia, se involucraron diferentes estructuras existentes para que los museos promotores pudieran obtener una visión informada interna. Colaboraciones con instituciones públicas y voluntarios dedicados a diferentes tipos de trabajo social, tanto con menores como con personas mayores, inmigrantes, excluidos sociales, discapacitados (comenzando una colaboración con el hospital pediátrico de la ciudad) y convictos [5].

4 Este proyecto fue presentado por el Dr. Cioppi del Museo di Storia Naturale at the 26th Congress ANMS-Associazione Nazionale Musei Scientifici (Trieste, November, 16-18, 2016) en forma de comunicación y poster en la manifestación Facciamoci Vedere (Milano, 13-15 de diciembre 2016). También hay una web del proyecto (https://welcome-musei-firenze.blogspot.it/), con enlaces a otros museos.

5 Listado de las instituciones involucradas en el proyecto: Associazione Anelli Mancanti, Associazione FuoriMercato, Associazione Interculturale Messaggeri di Pace, Associazione Oltre, Caritas - progetto Rom, Casa circondariale di Volterra, Casa circondariale Mario Gozzini, Centri Educativi Gould e Ferretti, Centro Anziani diurno I Tigli, Centro anziani Villa Bracci, Centro di Solidarietà Anconella, Chini Lab, Comunità per minori P. Annibale M. Di Francia, Comunità di Sant'Egidio di Firenze,

Para el enfoque inclusivo, se ha adaptado la propuesta de los museos a la audiencia. Un punto crucial fue elegir, con ayuda de expertos, los contenidos y las modalidades para que sean lo más interesantes y comunicativos posible, incluso qué recursos usar para hacerlos accesibles.

USUARIOS	ACTIVIDADES	TEMA
Niños de acogida, comunidad gitana	Poca diferencia	La posibilidad de una experiencia diferente: ir al museo
Adolescentes en casas de acogida	Inserción en días de puertas abiertas entre la audiencia general	Trabajar con otros de su edad: origami
Menores en riesgo de exclusión	Colaboración con las actividades en los centros de día	Materiales específicos.
Pacientes en rehabilitación	Colaboraciones con las actividades de los centros	
Convictos		
Grupos de inmigrantes	Visitas guiadas	Conexiones interculturales.
Pacientes con minusvalías mentales	Actividades en grupos pequeños	Personalización de actividades
Pacientes de Alzheimer	Actividades adaptadas	Estímulo y reinserción social.
Ancianos		
Minusválidos		
Pacientes del Hospital Pediátrico.	Actividades en el centro	

Entre los grupos a los que se dirigía el proyecto WELCOME, dos tuvieron un papel particularmente importante: los discapacitados visuales y auditivos. Esto se debió principalmente a la participación de expertos interesados en el diseño de acciones e iniciativas dedicadas a su inclusión. Además de ser los usuarios finales de estas propuestas dedicadas, también se incluyeron como coprotagonistas del diseño de estas propuestas.

Actividades y módulos.
Il Giardino d'Archimede.

Una de estas colaboraciones especiales fue la de la Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti. Su ayuda fue fundamental para proyectar y diseñar recursos especiales como leyendas y guías en braille, con textos y figuras, para hacer algunos itinerarios en los museos disponibles para las personas con discapacidad visual.

En el caso de los museos interactivos, como el Giardino di Archimede, algunos contenidos ya están disponibles para la exploración táctil. El itinerario dedicado al Teorema de Pitágoras, por ejemplo, consiste en rompecabezas de madera, que son totalmente utilizables por las personas con discapacidad visual. Las leyendas e instrucciones para los acertijos se tradujeron a braille, de modo la autonomía puede ser total en esa parte de la visita, con o sin la ayuda del personal o los facilitadores. Hasta ahora,

---

Cooperativa Il Mandorlo, Cooperativa sociale Le Rose, Cooperativa sociale Matrix onlus, Guidi Raggi RSA, La Cupolina RSA, Le Magnolie RSA, Montedomini RSA, Opera Madonnina del Grappa, Ospedale pediatrico Meyer, Progetto Villa Lorenzi, Residenza Villa Canova, Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti, Villa Michelangelo RSA.

solo una parte de los itinerarios están disponibles para las personas con discapacidad visual sin acompañantes.

Algunas intervenciones pueden ayudar a acercarse a partes de las exposiciones, por ejemplo, la impresión 3D de diferentes objetos geométricos, a escala, de modo que se pueden manipular directamente para la exploración táctil.

La contribución de la Unione Italiana Ciechi e Ipovedenti ha sido esencial para evaluar el éxito de estos recursos, en los cuales algunas propiedades específicas como la rugosidad del acabado o las dimensiones de estos objetos podrían dificultar su interpretación. Su contribución fue importante, en términos generales, para comprender cómo utilizar mejor estos recursos viejos y nuevos. La mayoría de estos materiales solo pueden funcionar cuando el facilitador del museo puede relacionarse con la experiencia del visitante.

Algunos recursos como impresiones 3D también pueden tener funciones múltiples e inclusivas: son útiles para las personas con discapacidad visual, pueden ser una invitación a la exploración táctil para cualquier tipo de audiencia, pueden reforzar la imaginación geométrica y en especial, pueden ser llevadas incluso fuera del museo físico.

Con el fin de promover el acceso a las personas con discapacidad auditiva, se inició una colaboración con un intérprete del lenguaje de signos. Algunos museos implementaron visitas para personas con discapacidad auditiva con la presencia del intérprete LS.

Se produjeron algunas presentaciones en vídeo [6] de los diferentes museos para personas con discapacidad auditiva. En algunos casos, los videos tenían subtítulos, en otros iban acompañados de una traducción LS. Estos videos fueron producidos con la ayuda tanto del intérprete como de un operador de video sordo que aportaba la perspectiva de un participante.

Otros recursos incluyen guías audiovisuales. Una vez más, la idea era proporcionar una herramienta que pudiera ser útil para una audiencia más amplia. La presencia de audio y video permite su uso por parte de personas con discapacidades auditivas o visuales. Para superar la barrera lingüística, también intentamos aumentar los idiomas disponibles. Los planes futuros del proyecto WELCOME están relacionados con las barreras sociolingüísticas, que sufren las minorías lingüísticas con dificultades para integrarse en la escena cultural local.

El proyecto también prevé formación del personal del museo para mejorar el trato del público con necesidades especiales.

Las actividades de formación fueron un paso muy importante, para los objetivos específicos del proyecto, centrándose en el sector del público con dificultades físicas, mentales o sociales.

6 https://welcome-musei-firenze.blogspot.com.es/p/sussidi-per-disabili-sensoriali.html

Para evaluar el éxito del proyecto, se realizó un estudio con entrevistas y cuestionarios para los participantes. La cooperación entre diferentes tipos de museos con fuertes puntos de contacto entre las metodologías didácticas y los educadores y la gestión, resultó un tremendo éxito del proyecto. Todos y cada uno de los museos involucrados tenían un terreno de trabajo común y sólido, que permitió la experimentación con diversos tipos de público.

En general, los comentarios de los visitantes en los museos implicados en el proyecto WELCOME han sido muy positivos, tanto para el personal del museo (recepción, guía y competencia en materia y comunicación) como para los propios museos, que consideraron estimulantes tanto en contenido como en interacción. Un punto de interés compartido y difundido entre los comentarios de los visitantes se refiere a la novedad: el descubrimiento de algo nuevo, nunca visto u oído, aún no aprendido, nuevos conceptos y nociones han sido el punto más apreciado para todo tipo de público. La novedad a menudo es la razón principal que motiva su entusiasmo: la experiencia del museo significa aprender cosas nuevas.

Otros museos con un profundo carácter práctico, como el Museo de Matemáticas de Cataluña, han tenido experiencias similares (con personas con discapacidad visual o auditiva, personas mayores, grupos de niños en riesgo de exclusión social, personas con discapacidad física y psicológica...), explotando el acceso “natural” de sus exhibiciones o adaptándolas cuando sea necesario. Las impresiones obtenidas coinciden con las recogidas de la experiencia florentina.

Como ya se mencionó, la creación de una red de instituciones permite una estimulante complicidad entre lenguajes específicos, aumenta la capilaridad de la intervención, multiplicando tanto cualitativa como cuantitativamente su valor.

Nuestra esperanza es que las implementaciones futuras y el desarrollo coherente con las directrices de un proyecto como WELCOME puedan transformar una visita a un museo en una experiencia donde todos puedan sentirse como protagonistas.

6 Un cuestionario para recopilar las impresiones de los usuarios.

6.1. Analizando datos

Los cuestionarios que hemos distribuido en nuestras exposiciones, aunque son diagnósticos, no tienen ningún significado por sí mismos. De hecho, nuestro primer objetivo fue probar la validez del cuestionario en sí, sus fortalezas y defectos, con el fin de elaborar un modelo coherente de evaluación interna que podría ser propuesto y aplicado más extensamente para obtener más evidencia.

Somos conscientes de que un cuestionario no es suficiente para evaluar completamente la experiencia. Además, las dimensiones de la muestra no permiten un análisis significativo.

La diversidad de la propuesta que cada miembro socio presenta a su audiencia en el proyecto también se ha de tener en cuenta.

Estos cuestionarios tuvieron que ser modificados durante su prueba, para adaptarse mejor a diferentes públicos.

Por ahora, solo nos permitiremos impresiones genéricas, capaces de iniciar una reflexión, necesaria para el diseño de la exposición Mathspaces, pero no dictando conclusiones o reglas.

mathspaces

Erasmus+

cuestionario alumnos <8

IDENTIFICACIÓN		
Yo soy:	☐ Chico	☐ Chica
Soy de.............................		

EVALUACIÓN	No me gusta	No lo sé	Sí	¡Me encanta!
Mi motivación antes de la visita…				
Me gustan las mates	☐	☐	☐	☐
Me gustan los juegos	☐	☐	☐	☐
Me gustan las nuevas experiencias	☐	☐	☐	☐
Me gusta el colegio	☐	☐	☐	☐
La experiencia ha sido				
Divertida	☐	☐	Sí☐	☐No
Interesante	☐	☐	Sí☐	☐No
Fácil	☐	☐	Sí☐	☐No
Difícil	☐	☐	Sí☐	☐No
Diferente / Nueva	☐	☐	Sí☐	☐No
Corta	☐	☐	Sí☐	☐No
Intensa	☐	☐	Sí☐	☐No
Una pérdida de tiempo	☐	☐	Sí☐	☐No
El monitor ha sido				
Amistoso	☐	☐	Sí☐	☐No
Duro	☐	☐	Sí☐	☐No
Distante	☐	☐	Sí☐	☐No
¿Qué actividad te ha gustado más?	....			

DESPUÉS DE LA VISÍTA		
He encontrado lo que esperaba	☐ Sí	☐ No
Ahora me gustan más las mates	☐ Sí	☐ No
Me gustaría volver a este museo	☐ Sí	☐ No
Recomendaré este museo a mis amigos	☐ Sí	☐ No

mathspaces

Cuestionario alumnos >8

IDENTIFICACIÓN				
Soy:	☐ Chico	☐ Chica		
☐ 9-10 años	☐ 11-12 años	☐ 13-14 años	☐ 15-18 años	☐ > 18 años
Vengo de…				

EVALUACIÓN 0 = totalmente en desacuerdo, 1 = parcialmente en desacuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = totalmente de acuerdo

Evalúa tu motivación antes de la visita				
Me gustan las mates	0	1	2	3
Me gustan los juegos	0	1	2	3
Me gustan las nuevas experiencias	0	1	2	3
Me gusta la escuela	0	1	2	3

La experiencia ha sido				
Divertida	0	1	2	3
Interesante	0	1	2	3
Satisfactoria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3

Evalúa la dinámica				
Amistosa	0	1	2	3
Animada	0	1	2	3
Colaborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Evalúa al dinamizador	0	1	2	3

Recuerda… 0 = totalmente en desacuerdo, 1 = parcialmente en desacuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = totalmente de acuerdo

Las actividades han sido				
Fáciles	0	1	2	3
Estimulantes	0	1	2	3
Diferentes / Nuevas	0	1	2	3
Cortas	0	1	2	3
Intensas	0	1	2	3
Suficientes	0	1	2	3
Excesivas	0	1	2	3
Una pérdida de tiempo	0	1	2	3

¿Qué actividad te ha gustado más? ....

¿Qué actividad te ha gustado menos? ....

DESPUÉS DE LA VISITA

He encontrado lo que esperaba	☐ Si	☐ No
Creo que mi visión de las matemáticas ha evolucionado	☐ Si	☐ No
Me gustaría volver a este museo	☐ Si	☐ No
Recomendaré este museo a mi familia/amigos	☐ Si	☐ No

COMENTARIOS

Erasmus+

mathspaces

Cuestionario evaluación público

IDENTIFICACIÓN

Género:	Primera vez que vienes

☐ Masculino ☐ Femenino ☐ Sí ☐ No

Grupo de edad

< 19 ☐ 30-39 ☐ 50-59

☐ 20-29 ☐ 40-49 > 60

Últimos estudios cursados....

☐ Menos que secundaria ☐ Secundaria

☐ Bachillerato ☐ Graduado / Licenciado

☐ Máster ☐ Doctorado

La mejor descripción de la organización donde trabajo es...

☐ Lucrativa ☐ Gubernamental ☐ Sanidad

☐ No lucrativa ☐ Educación ☐ Otros

EVALUACIÓN 0 = totalmente en desacuerdo, 1 = parcialmente en desacuerdo,
2 = de acuerdo, 3 = totalmente de acuerdo

Evalúa tu motivación antes de la visita				
Me gustan las matemáticas	0	1	2	3
Me gustan las nuevas experiencias	0	1	2	3
Me gustan los museos/espacios de ciencia/exposiciones	0	1	2	3
Me gusta ofrecer a la familia/amigos nuevas experiencias	0	1	2	3

Evalúa la duración				
Corto	0	1	2	3
Intenso	0	1	2	3
Excesivo	0	1	2	3
Suficiente	0	1	2	3

Evalúa la experiencia				
Divertida	0	1	2	3
Interesante	0	1	2	3
Satisfactoria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3
Diferente / Nueva	0	1	2	3
Fácil	0	1	2	3
Estimulante	0	1	2	3
Una pérdida de tiempo	0	1	2	3

mathspaces

Cuestionario evaluación público

Evalúa la dinámica				
Amistosa	0	1	2	3
Animada	0	1	2	3
Colaborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Evalúa al dinamizador	0	1	2	3

DESPUÉS DE LA VISITA

He encontrado lo que esperaba	☐ Si	☐ No
Creo que mi visión de las matemáticas ha evolucionado	☐ Si	☐ No
Me gustaría volver a este museo	☐ Si	☐ No
Recomendaré este museo a mi familia/amigos	☐ Si	☐ No

COMENTARIOS

mathspaces

Cuestionario profesores

IDENTIFICACIÓN			
Género:		Primer contacto	
☐ Masculino	☐ Femenino	☐ Sí	☐ No

Mi especialidad es…		
☐ Matemáticas	☐ Ciencias	☐ ....

Doy clase en				
☐ Primaria		☐ Secundaria		☐ ....
☐ menos de 8 años	☐ 9-13	☐ 14-16	☐ 17-18	☐ Más de 18

Asignatura		
☐ Matemáticas	☐ Ciencias	☐ ....

Vengo de
....

EVALUACIÓN 0 = totalmente en desacuerdo, 1 = parcialmente en desacuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = totalmente de acuerdo

Evalúa tu motivación antes de la visita				
Me gustan las matemáticas	0	1	2	3
Me gustan los juegos	0	1	2	3
Me gustan las nuevas experiencias	0	1	2	3
Me gustan los museos	0	1	2	3

Evalúa la temporización				
Corto	0	1	2	3
Intenso	0	1	2	3
Excesivo	0	1	2	3
Suficiente	0	1	2	3

Evalúa la experiencia				
Divertida	0	1	2	3
Interesante	0	1	2	3
Satisfactoria	0	1	2	3
Educativa	0	1	2	3
Fácil	0	1	2	3
Estimulante	0	1	2	3

mathspaces **Cuestionario profesores**

Retadora	0	1	2	3
Diferente / Nueva	0	1	2	3
Una pérdida de tiempo	0	1	2	3
Evalúa la dinámica				
Amistosa	0	1	2	3
Animada	0	1	2	3
Colaborativa	0	1	2	3
Dispersa	0	1	2	3
Evalúa al dinamizador	0	1	2	3

¿Qué actividad te ha gustado más? ....

¿Qué actividad te ha gustado menos? ....

CONCLUSIÓN

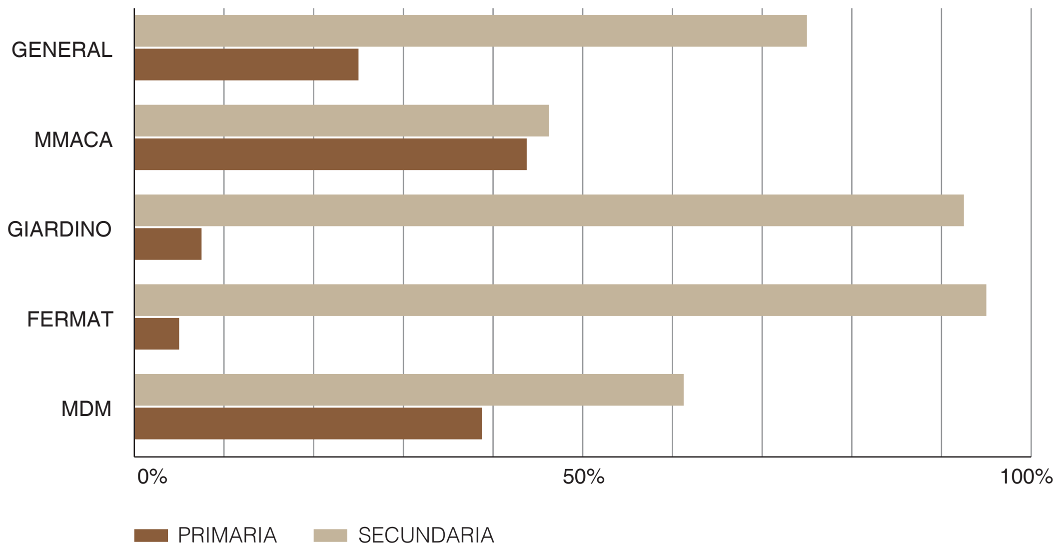
He encontrado lo que esperaba	☐ Sí	☐ No
Creo que la visión de las matemáticas de los estudiantes ha cambiado	☐ Sí	☐ No
Me gustaría volver a este museo	☐ Sí	☐ No
Recomendaré este museo a mi familia/amigos	☐ Sí	☐ No

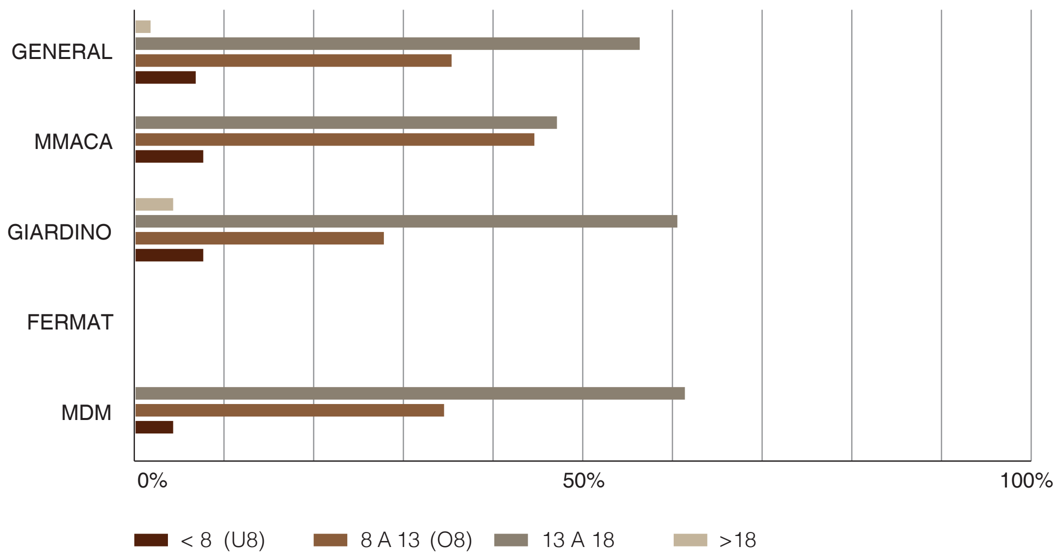
COMENTARIOS

6.1.1. Composición de la muestra.

Hemos considerado cuatro grupos de usuarios: público en general, profesores y dos grupos de estudiantes: menores y mayores de 8 años - U8 y O8 - considerando que a esta edad hay un cambio profundo en la conceptualización de las matemáticas.

(Por supuesto, hay otros momentos clave posibles: introducción al álgebra (12-13 años), cálculo diferencial (15-16), que sin duda son saltos cognitivos significativos, pero probablemente tienen efectos menores en comparación con las formas de la propuesta del museo).



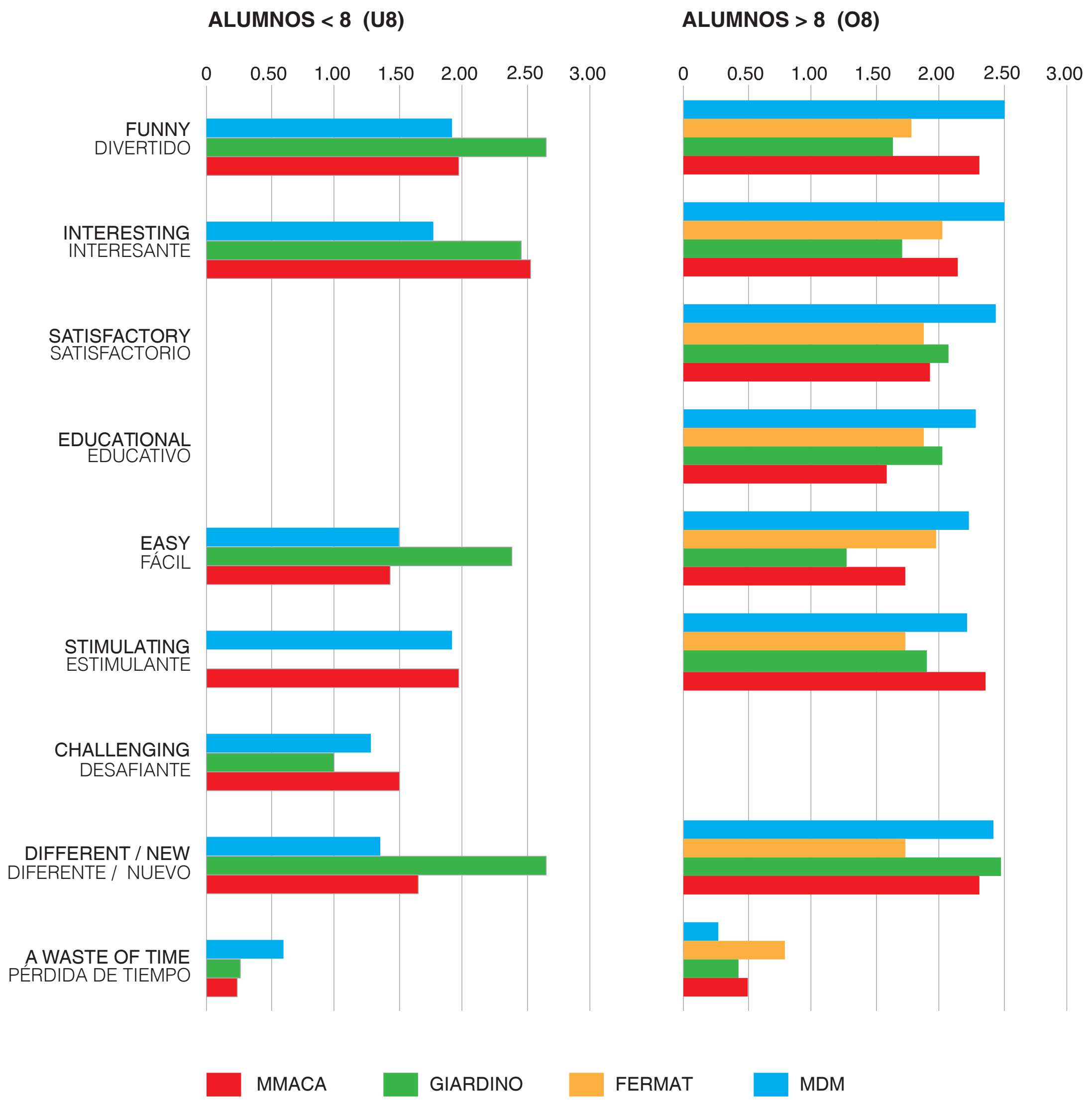


6.1.2. Evaluación de los estudiantes de su experiencia en el museo:

Grupo U8: la experiencia se considera divertida (2 de 3), interesante (2.4) y nueva / diferente (1.75), pero con cierta discrepancia en situaciones locales.

No es tan fácil (1.5) y ciertamente no se considera una pérdida de tiempo (0.25).

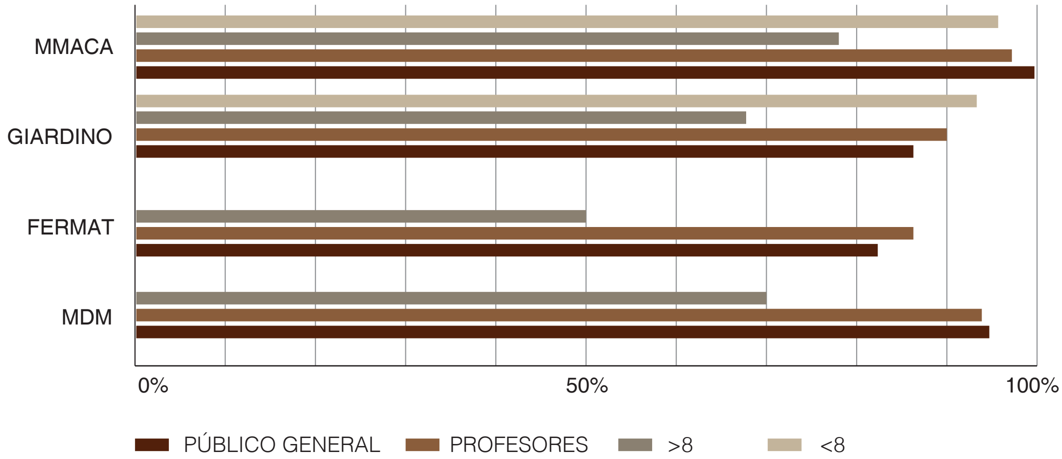
Grupo O8: la mayoría de las respuestas oscilan alrededor de 1.8 (hasta 3); por lo tanto, la experiencia se considera divertida, interesante, satisfactoria, educativa, estimulante y nueva / diferente al mismo tiempo. No parece tan fácil (1.75) y ciertamente no se considera una pérdida de tiempo (0.5).



6.1.3. “Quiero volver”

Grupo U8: Tenemos pocos datos, pero muy indicativos: ¡el 90% de los encuestados expresó el deseo de regresar al museo! Es una respuesta similar a la de un adulto, lo que significa que la vocación educativa de nuestra propuesta no limita la oferta a un público escolar.

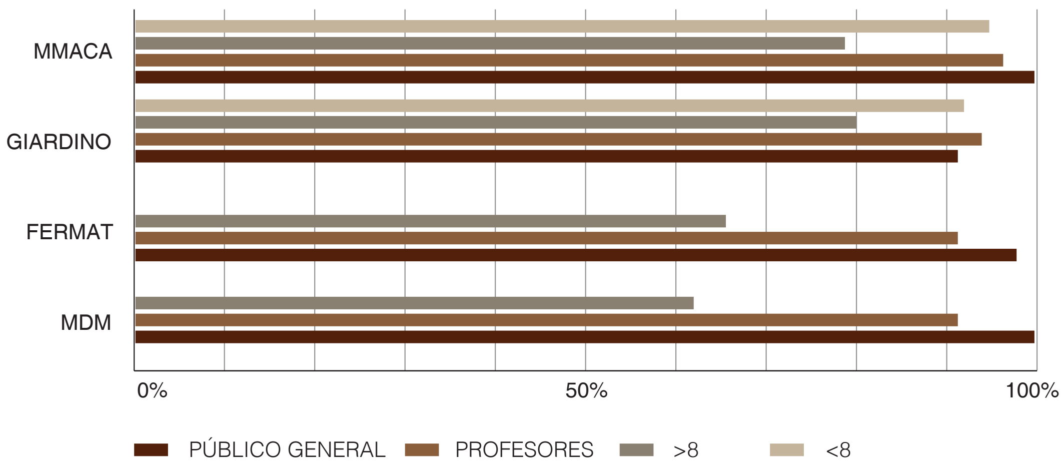
Grupo O8: la respuesta local oscila entre el 50 y casi el 80% de la intención de regresar al museo. Tal variabilidad requiere una gran cautela al sacar conclusiones y exige un análisis interno más profundo de cada institución. El grupo es muy heterogéneo e incluye edades que tradicionalmente dan respuestas muy diferentes a la oferta de centros de ciencia, desde el entusiasmo de la primera adolescencia hasta el rechazo a los dieciséis.



6.1.3. “Yo lo recomendaría”

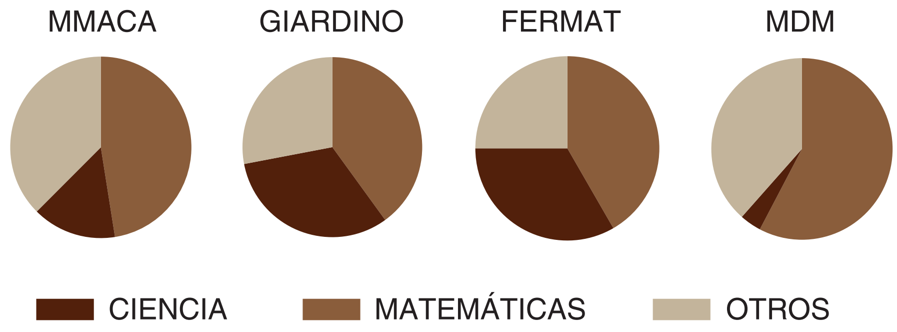
Grupo U8: Tenemos pocos datos, pero muy indicativos: el 98% de los encuestados expresaron que recomendarían mucho una visita a nuestras exposiciones, mostrando una vez más un acuerdo completo con la audiencia adulta.

Grupo O8: la respuesta es menos entusiasta (y más variada), pero alrededor del 70% recomendaría una visita a nuestras exposiciones.

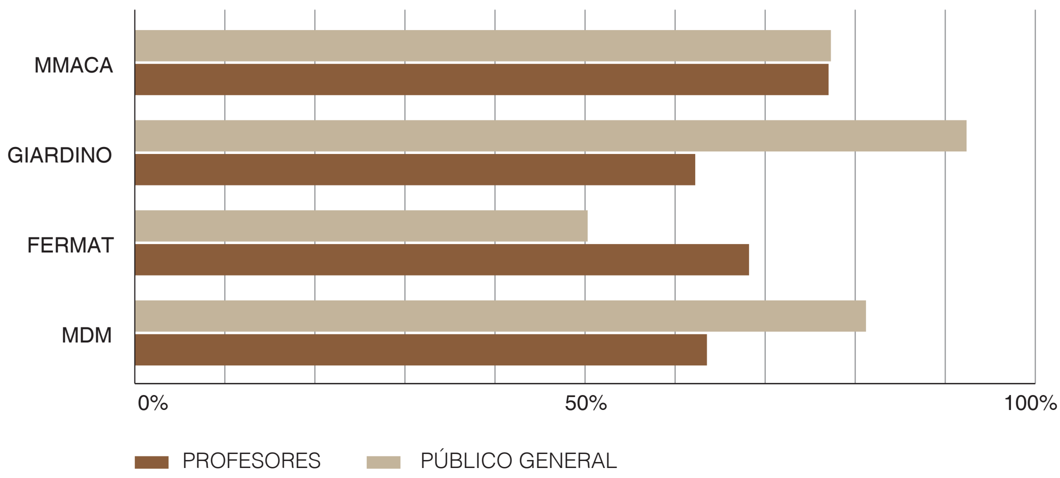


6.2. ¿Qué profesores vienen a nuestra exposición?

Como era de esperar, los profesores de matemáticas son casi la mitad de los que acompañan a sus alumnos a nuestras visitas, a pesar de que tienen una composición diferente entre los maestros de primaria y secundaria.



Dependiendo de la situación, la mayoría de los usuarios venían al museo por primera vez (del 50% al 90%).

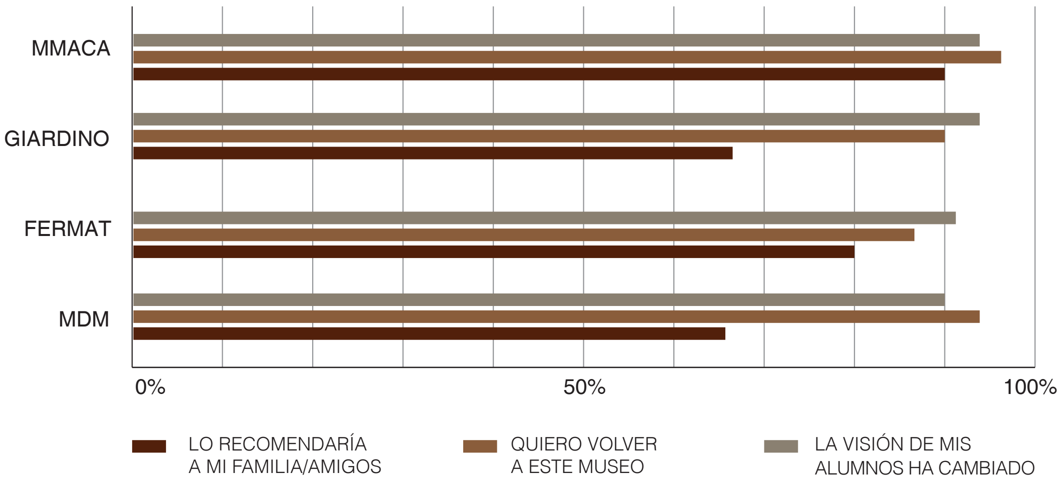


Los factores involucrados son muchos y diferentes entre sí: extensión del área de influencia; antigüedad de la institución; facilidad del transporte; proyectos dirigidos de la escuela / museo...

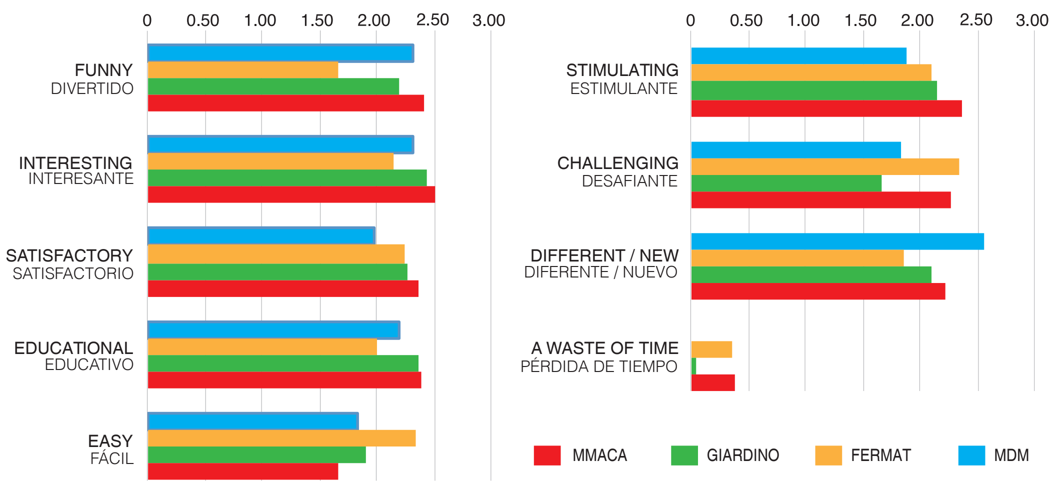
Sin embargo, los datos sugieren elementos de reflexión: cómo ampliar nuestra área de influencia, la necesidad de capacitar a los docentes para que la visita sea más productiva y esté más vinculada al trabajo de clase, etc.

6.3. ¿Qué piensan los profesores de nuestra exposición?

Aunque dada la pequeña muestra haya que ser prudentes, los resultados de la encuesta son muy gratificantes. La visita proporciona una nueva visión de la matemática al 65-90% de los docentes que expresan su intención de regresar (85-95%) y recomiendan la visita (90-95%)



El éxito de nuestra propuesta queda confirmado por la valoración de los profesores: interesante (2.75 de 3), satisfactorio (2.5), educativo (2.5), estimulante (2.5), nuevo / diferente (2.2).



Curiosamente, las diferencias que aparecen en la valoración de la dificultad de los contenidos y actividades parecen menores (2.7) en una muestra compuesta casi en su totalidad por docentes de secundaria y, por el contrario, aumenta (1.8) cuando los usuarios son más jóvenes.

¡Y, una vez más, la visita lo es todo menos una pérdida de tiempo (0.4)!

6.4. El papel de los educadores.

Finalmente, un papel importante en la valoración positiva recibida por todos los miembros del proyecto, a pesar de la forma diferente de llevar a cabo sus actividades, parece deberse a los educadores culturales-facilitadores-mediadores (¡tantos nombres para tantas funciones!). En todos los casos su trabajo se califica alrededor de 2.5 de 3 por parte de todos los públicos (aquí también con una ligera caída en la muestra de adolescentes).