L'ESTADÍSTICA ES POT TOCAR

Document elaborat per la
Societat Catalana d'Estadística

per al
Museu de Matemàtiques de Catalunya

Grup de treball de formació de la SoCE

Núria Pérez-Álvarez *(coordinadora)*
Moisés Gómez Mateu *(coordinador)*
Lesly Acosta Argueta *(coordinadora)*
Anabel Blasco Moreno
Jordi Cortés Martínez
Natalia Vilor Tejedor

Membres del MMACA

Anton Aubanell
Enric Brasó
Pura Fornals
Guido Ramellini
Josep Rey

Versió 16 de setembre de 2019

Introducció

El document "L'ESTADÍSTICA ES POT TOCAR" és un material divulgatiu realitzat amb l'objectiu d'explicar de forma propera, entretinguda i didàctica alguns dels elements exposats al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)[1] que il·lustren conceptes estadístics, tot utilitzant dinàmiques que motivin els visitants. D'aquesta manera, es pretén fomentar i divulgar el coneixement sobre l'estadística de manera interactiva i divertida a un públic el més ampli possible.

Cada activitat proposada en aquest recull es basa en conceptes estadístics que es fan servir en l'àmbit de l'estadística aplicada. Està basat en documentació prèvia per part del Museu (Brasó, 2015)[2] i la seva ampliació ha sigut consensuada entre diferents membres del MMACA juntament amb el grup de treball de la Societat Catalana d'Estadística (SoCE) [3].

Els continguts principals d'aquest document són:

- Petit recull de jocs relacionats amb l'estadística.
- Proposta de noves dinàmiques atractives per exposar els jocs y els elements estadístics al públic al que va dirigit, que bàsicament són nens i joves adolescents, tot i que està obert a públics de totes les edats.

Per a cada activitat es descriuen els següents atributs:

- Títol.
- Conceptes relacionats.
- Funcionament general.
- Activitat associada (Temps requerit, nombre de participants, edat mínima, i explicació).
- Comentaris.
- Aplicacions.

---

[1] Museu de matemàtiques de Catalunya (MMACA). https://mmaca.cat.
[2] Brasó, Enric. (2015). Els mòduls de probabilitat i estadística del MMACA. NouBiaix, 37. El racó del MMACA (p. 97-103). https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/302385/392063.
[3] Societat catalana d'estadística (SoCE). http://soce.iec.cat.

Contingut d'activitats

Societat Catalana d'Estadística
L'estadística es pot tocar

1 L'estadística i el món

Conceptes relacionats
Població, mostra aleatòria simple, i qualitat de l'estimació puntual (biaix de selecció, grandària de la mostra, variància de l'estimador).

Amb aquest element volem il·lustrar la importància d'usar un procediment aleatori (no subjectiu) per seleccionar una mostra representativa de la qual provenen les unitats experimentals. Així mateix, comentem la rellevància de la mida mostral de cara a obtenir estimacions més precises.

Funcionament general
Es seleccionen diferents mostres del conjunt de les 100 pedres (**població**) que hi ha a la capsa i s'extreuen conclusions.

Activitat associada: Mostra representativa i qualitat de l'estimació.

Temps requerit: 5-10 minuts.
Nombre de participants: 1 o més.
Edat mínima: a partir de 10 anys.

Es tracta de seleccionar una mostra que sigui representativa. Es demana al visitant que seleccioni una mostra de 10 pedres entre una població de 100 pedres de diferent mides i colors. Volem estimar (esbrinar aproximadament) el pes mitjà de les pedres. Quin pes mitjà observem? Comparem-ho amb el pes mitjà poblacional (real). Hi ha molta diferència?

Imaginem ara que volem estimar el percentatge de pedres grises. Quantes conté la mostra? Comparem-ho amb les pedres grises que hi ha realment.

Reflexionem: A què poden ser degudes les diferències observades? Com podríem millorar aquestes estimacions?

Comentaris

Població
Està conformada pel total d'unitats experimentals d'interès; en aquest cas, per les 100 pedres de la caixa (cada pedra és una unitat experimental).

Mostra
És qualsevol subconjunt de la població.

Mostra representativa
És aquell subconjunt de la població obtinguda mitjançant un procediment aleatori que ens "garanteix" que totes les característiques poblacionals estan representades en la mostra obtinguda.

A la pràctica és difícil arribar a tots i cadascun dels individus que composen una població per raó de temps, accessibilitat, recursos econòmics, etc. Per aquest motiu s'agafa una mostra aleatòria (subconjunt) de *n* casos extrets d'una població mitjançant alguna tècnica de mostreig.

Les tècniques de mostreig poden ser equiprobables, on tots els individus tenen la mateixa probabilitat de ser escollits en una mostra, donar un pes major a certs individus per ser escollits amb més probabilitat, o fer una selecció aleatòria dins de diferents estrats, i així millorar les estimacions. La part de la selecció de la mostra és una part molt important del disseny de qualsevol estudi i l'èxit d'aquest depèn en bona part de la correctesa del mostreig realitzat. Lo ideal, doncs, és fer servir un sistema d'extracció no subjectiu (aleatori).

Idealment la selecció de las pedres no hauria de dependre de la persona que les escull perquè aquesta persona podria agafar les que són més grans, les que li semblen més maques, o les que són d'un color diferent. Si fos així, estaríem incorrent en un biaix de selecció.

Com ho podríem fer doncs? Mitjançant una mostra aleatòria. Podríem, per exemple, enumerar cadascuna de les pedres i fer una extracció de *n* nombres aleatoris (*n* pedres) generats amb l'ordinador.

Paper de la grandària mostral

Aquí se li pot explicar al visitant que la qualitat de l'estimació depèn també en gran mesura de la grandària de la mostra; com més gran la mida mostral (n=10, n=15, n=20, etc.), més precisa serà la nostra estimació. És a dir, la variabilitat dels possibles resultats si agaféssim moltes mostres de mida *n* seria més baixa, i per tant tindríem més probabilitat que la nostra mostra en particular s'aproximés a la mitjana real.

Existeixen tècniques estadístiques per estimar la grandària d'una mostra que ens garanteixi, amb rigor matemàtic, una certa precisió per a les nostres estimacions.

Aplicacions

A la gran majoria dels projectes de recerca l'investigador ha de decidir amb quins *n* subjectes es durà a terme la recerca. Cal delimitar l'àmbit de la investigació definint la població objectiu; és a dir el conjunt *N* de tots els individus tals com persones, objectes o esdeveniments amb els quals es vol estudiar algun aspecte.

Societat Catalana d'Estadística
L'estadística es pot tocar

2 Quina és la proporció de boles blaves?

Conceptes relacionats
Proporció poblacional, proporció mostral, interval de confiança i error d'estimació.

Amb aquest element volem il·lustrar que quan realitzem una estimació d'una característica poblacional desconeguda (en estadística, paràmetre) a partir d'una mostra, hi ha un marge d'error. Aquest marge d'error o incertesa en l'estimació es pot quantificar probabilísticament mitjançant la construcció del que coneixem en estadística com interval de confiança.

Funcionament general
Cal fer girar enèrgicament el bombo amb aproximadament 2500 boletes de 2 colors, i aturar-lo de manera que sobre el llistó de fusta quedi una mostra d'unes 50 boletes.

Activitat associada: Construint un interval de confiança.

Temps requerit: 5-10 minuts.
Nombre de participants: 1 o més si li cal ajuda per fer els càlculs.
Edat mínima: a partir de 12 anys.

A partir d'aquesta mostra, se li pregunta al participant quina proporció de boles blaves creu que hi ha al bombo, aproximadament. Per estimar la proporció, comptarem les boles blaves i les dividirem per 50.

Reflexionem: A què pot ser degut que per a estimar aquesta proporció, no hi ha necessitat de comptar totes les boles blaves en el bombo i només ens cal una petita mostra d'aquestes? Com es podrien millorar aquestes estimacions?

Comentaris
Les 50 boletes del llistó són la nostra mostra aleatòria. Cal comptar quantes boletes blaves hi ha. Si hi ha 8 boletes blaves del total de 50, això vol dir que el percentatge de boletes blaves a la mostra és del 16%. Aquesta és la proporció mostral.

La proporció mostral és una molt bona estimació (aproximació) de la proporció de tota la població de boletes. Per tant, podem dir que la proporció estimada de boletes blaves al bombo és del 16%.

Però, què passa si traiem una altra mostra? Podríem girar el bombo, triar una altra mostra i comptar de nou el nombre de boletes blaves. Hauria canviat el número de boletes blaves? Possiblement sí, aleshores, quina és la veritable proporció de boletes blaves a tot el bombo? Mai ho podrem saber amb una certesa del 100% a no ser que comptem totes les boles del bombo.

En canvi, a partir de la nostra mostra podem calcular un rang de valors que garanteix amb una probabilitat determinada que aquest rang contingui el veritable valor del paràmetre (proporció poblacional). Aquest rang s'anomena interval de confiança. Així, un interval amb confiança del 95% voldrà dir que aquest interval no inclourà la veritable proporció poblacional en aproximadament un 5% del casos.

Què penseu que serà més ampli, un interval del 99% o un interval del 95%? Pista, penseu com ha de ser d'ampli un interval del 100% on no deixéssim fora cap valor per no cometre cap error.

Un altre concepte que intervé en el càlcul de l'interval de confiança és la mida de la mostra. Si la mostra és molt gran, les estimacions seran més precises perquè ens acostarem a tota la població i això implicarà que l'interval sigui més estret. Per contra, si la mostra és petita, les estimacions seran més imprecises i per tant, l'interval de valors es farà més ampli.

Aplicacions
A partir de les proporcions mostrals resulta relativament senzill aproximar les proporcions que es donaran a tota la població sense necessitat de mostrejar la població sencera. Això és molt útil a l'hora de trobar la prevalença (proporció) de determinades malalties en un país o fins o tot a nivell mundial. D'aquesta manera es pot trobar, per exemple, la proporció de fumadors d'un país i fer una previsió de la despesa sanitària que representaran en un futur.

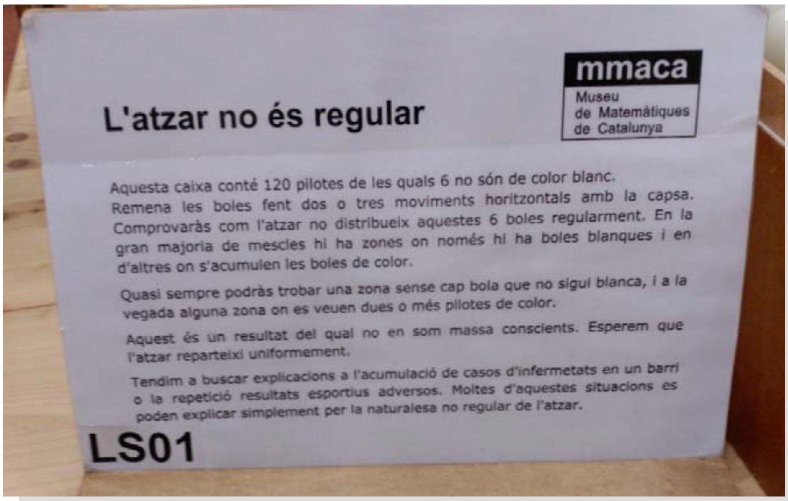
Una altra disciplina on està molt estès l'ús dels intervals de confiança són les ciències socials. Quan es vol conèixer la distribució d'una població respecte una sèrie de característiques sociodemogràfiques com ara el nivell d'estudis, el nivell salarial, situació laboral (atur/ocupat), es pren una mostra i s'estimen totes aquestes característiques d'interès per després poder extrapolar el resultat observat a la mostra a la població sencera mitjançant els intervals de confiança.

A banda de la medicina o les ciències socials, els intervals de confiança són també una eina molt emprada dins dels estudis de màrqueting. El màrqueting és una eina molt important per a la majoria de les empreses, per exemple, per estimar el nivell de vendes futures d'un producte.

Una empresa pot voler saber quin serà els seu volum de vendes aquest any, aproximadament. En recollir dades de clients, números de vendes anteriors i altres fonts, l'empresa pot estimar mitjançant l'interval de confiança el valor de les vendes futures i determinar l'abast de les seves vendes.

Un altre exemple relatiu a l'àmbit dels negocis és la gestió del risc. Per exemple, si una empresa té el 95% de confiança que les vendes en el pròxim període se situaran entre 5 i 6 milions d'unitats, aleshores hi ha un 5% de probabilitat que aquest interval no contingui el vertader valor de vendes pel proper període. D'aquesta manera, l'empresa ho pot gestionar i actuar en conseqüència segons aquesta valuosa informació.

3 L'atzar no és regular



Conceptes relacionats

Atzar i probabilitat. Amb aquest element volem il·lustrar que la percepció de l'esser humà sobre l'atzar no sempre concorda amb la realitat. Contràriament al que es pot pensar, l'atzar no és sinònim del que entenem com a regular, uniforme o simètric. Aquest comportament que desafia la nostra intuïció pot explicar-se amb definicions i regles de l'estadística (càlcul de probabilitats).

Funcionament general

Es barregen les boles dins la caixa (totes blanques excepte 6 de color) i s'observa que moltes vegades l'atzar no és tan regular com esperaríem. Observem que moltes vegades queden zones sense boles de color, i moltes altres les boles de color queden properes entre sí.

Una manera, potser més interactiva, de veure-ho és mitjançant un joc usant plantilles de cartó, com es presenta a continuació.

Activitat associada: Concorda la nostra percepció de l'atzar amb la realitat?

Temps requerit: 15 minuts.
Nombre de participants: 2 o més
Edat mínima: a partir de 12 anys.

Parlem de regularitat
S’ensenya al nen/nena la següent plantilla impresa:

Se’ls pregunta: Si us donéssim 3 fitxes i les col·loquéssiu completament a l’atzar, com creieu que quedarien distribuïdes en general? Marqueu la posició amb una creu.

Esperem que el nen les distribueixi separades, com per exemple així:

X		X
	X	

En comparació amb la disposició que acabes de fer, creus que les següents situacions són menys probables?

X	X	X

	X	X
		X

Per tal de fer-los veure que en realitat la probabilitat que passi cadascun dels dos casos anteriors és la mateixa, es podrien imprimir targetes amb totes les combinacions possibles (en total són 84) perquè entenguin el concepte de probabilitat, i que no és més probable que quedin distribuïdes “uniformement” si no tot el contrari.

Per exemple, quina probabilitat creieu que tindrà que una fitxa estigui aparellada amb una altra (que es toquin en un dels costats de la casella)? Això ho poden fer agafant les que no són aparellades (14) i fer servir el complementari (84-14 = 70 => 70/84 = 0,83). Per tant, hi ha una probabilitat força alta que estiguin aparellades, del 0,83! Contràriament al que es podria pensar a priori.

A continuació s'il·lustren les 14 targetes amb caselles no aparellades:

	X	
X		X

X		
	X	
X		

X		X
	X	

		X
	X	
		X

	X	
X		X

X		
		X
X		

X		X
	X	

		X
X		
		X

X		
X		X

X		X
X		

X		X
		X

		X
X		X

X		
	X	
		X

		X
	X	
X		

Parlem de simetria

Es podria tenir en compte també les simetries, com a segona fase del joc, i preguntar quin grup de fitxes creu que seria més probable (ex. en diagonal, juntes en un cantó, separades les 3 als cantons, etc.). Ho podrien esbrinar comptant i agrupant el total de targetes que compleixen les condicions i dividint per 84.

Comentaris

En els anteriors exercicis hem observat resultats sorprenents respecte a com percebem un comportament aleatori. La nostra intuïció es veu desafiada ja que moltes vegades la nostra percepció de l'atzar no és del tot correcta: se sol associar aleatorietat amb comportament regular o simètric i això no concorda amb la realitat.

Un exemple és el fet de que la gent eviti agafar números peculiars (ex. 11111 o 12345) en els sortejos de la loteria quan, en realitat, aquests números tenen la mateixa probabilitat de sortir que la resta. Afortunadament, fent ús de l'estadística i concretament del càlcul de probabilitats podem aprendre a reconèixer de forma adequada el que és un comportament aleatori.

Aplicacions

La no afectació d'alguns barris als bombardeigs de Londres a la Segona Guerra Mundial o l'acumulació de determinades malalties en un entorn són casos en què es busca una explicació causal quan poden ser explicats simplement pel comportament de l'atzar.

Però aleshores, com podríem detectar quan es dóna un efecte causal a les coses? Un exemple molt clar serien els anomenats assajos clínics, els quals es fan servir per estudiar si un tractament és efectiu o no.

Molt resumidament, s'assigna aleatòriament un tractament nou a un grup de pacients i el tractament actual en un altre i s'observa la malaltia en cadascun dels grups (ex. número de pneumònies curades). Com hem vist, possiblement hi hauran diferències entre els dos grups (gèneres, edats, ciutats on viuen, etc.) però seran simplement degudes a l'atzar. En realitat, l'únic que hem "forçat" i que és diferent a cada grup és el tractament i per tant, si observem que en un grup hi ha més pacients amb pneumònies podem evidenciar amb prou rotunditat que és degut al tractament.

Pregunta/reflexió oberta pels nens: Quants més pacients tinguem per fer l'experiment, millor, ja que la mostra permetrà tenir més precisió i minimitzar el risc què per "mala sort", no tinguem pacients de tot tipus, com hem vist en l'exemple. També es fan servir fórmules estadístiques per saber el número de pacients que es necessiten per detectar la magnitud de l'efecte, entre altres. Però per quines raons creieu, a part de raons estadístiques, que no s'agafen tants pacients com vulguem per fer l'experiment?

Aquí els faria reflexionar sobre l'ètica; no és moral donar un tractament no provat a tantes persones com vulguem, i l'estadística ens ajuda a fixar aquest llindar.

4 Coincidències

Conceptes relacionats
Permet introduir els conceptes de probabilitat, probabilitat complementària i el concepte d'independència. Es pot enfocar també com un problema de combinatòria, mitjançant la qual permet "comptar sense comptar".

Funcionament general
Calen 8 participants. A cada participant se li dona un "ou" i se li demana que l'introdueixi en algun dels 15 forats que conté la capsa de fusta, sense que la resta de participants ho vegi. Un cop el darrer participant ha ficat el seu "ou" a la capsa, es recomptarà quants ous han anat a parar a cada forat. L'estadística ens diu que, amb 8 participants i 15 forats, la probabilitat de que en un mateix forat s'hagi ficat més d'un "ou" és del 0,9! Coincidència?

Activitat associada: Calculem probabilitats.

Temps requerit: 10 minuts.
Nombre de participants: Calen 8 participants, tot i que el nombre pot variar.
Edat mínima: 12 anys.

Calculem probabilitats

Es tracta d'aprendre a comptar quines són les possibilitats perquè aparegui alguna "coincidència". Per resoldre aquest problema on es vol conèixer la probabilitat d'alguna coincidència, és millor resoldre-ho des del punt de vista del complementari, és a dir, quina és la probabilitat de cap coincidència. A partir d'aquí, es tracta de comptar les possibilitats que té cada participant. Comencem:

- El primer participant té un "ou" i els 15 forats estan tots buits, pot triar qualsevol forat per ficar el seu ou, per tant, té 15 possibilitats entre 15: $\frac{15}{15}$.
- El segon participant també té un "ou" però, ara només hi ha 14 forats buits donat que el primer participant ja n'ha ocupat un. Si no vol coincidir, té 14 possibilitat entre 15: $\frac{14}{15}$.
- El tercer participant té un "ou" però, ara només hi ha 13 forats buits donat que el primer i el segon participants ja n'han ocupat dos. Si no vol condir amb els dos primers, té 13 possibilitat entre 15: $\frac{13}{15}$.
- De forma anàloga es troben les probabilitats de la resta de participants, així doncs:
  - 4art participant: $\frac{12}{15}$.
  - 5è participant: $\frac{11}{15}$.
  - 6è participant: $\frac{10}{15}$.
  - 7è participant: $\frac{9}{15}$.
  - 8è participant: $\frac{8}{15}$.

Ara ja coneixem la probabilitat de cada participant de triar un forat buit, anem a trobar ara la probabilitat de que cap hagi coincidit. Aquí intervé el concepte d'**independència**. Podem assumir que cada participant ha triat lliurement el forat on introduir l'ou i per tant, han actuat de forma totalment independent sense estar condicionat per la resta de companys. Sota l'assumpció d'independència, la probabilitat que cap participant hagi triat un forat diferent és:

$$\mathrm{P(Cap\ coincidència)} = \frac{15}{15} x \frac{14}{15} x \frac{13}{15} x \frac{12}{15} x \frac{11}{15} x \frac{10}{15} x \frac{9}{15} x \frac{8}{15} = \frac{259459200}{2562890625} = 0{,}101237.$$

Hem acabat? No, cal recordar que aquesta és la probabilitat de "cap coincidència" i nosaltres volíem trobar la probabilitat d'alguna coincidència. Aquesta probabilitat es troba fent el **complementari**:

P(Alguna coincidència) = 1 - P(Cap coincidència) = $1 - 0{,}101237 = 0{,}898763$.

Per tant, la probabilitat que hi hagi almenys un forat triat per més d'una persona és gairebé del 0,9.

El valor "1" del càlcul anterior representa la probabilitat total, és a dir, amb una certesa del 100% obtindrem un dels resultats possibles: cap coincidència, una coincidència, dues, tres... o vuit. És a dir,

P(Cap coincidència) + P(Una coincidència) + P(Dos coincidències) + P(Tres coincidències) + P(Quatre coincidències) + P(Cinc coincidències) + P(Sis coincidències) + P(Set coincidències) + P(Vuit coincidències) = 1.

En termes de probabilitat, "alguna coincidència" s'indicaria com:

P(Alguna coincidència) = P(Una coincidència) + P(Dos coincidències) + P(Tres coincidències) + P(Quatre coincidències) + P(Cinc coincidències) + P(Sis coincidències) + P(Set coincidències) + P(Vuit coincidències) = 1 - P(Cap coincidència).

En resum, el que hem fet és detectar les probabilitats que tenia cada participant de no coincidir amb la resta. Després, sustentant-nos en la hipòtesi d'independència dels participants, hem trobat la probabilitat de cap coincidència en el joc. Finalment, hem fet servir el complementari per trobar la probabilitat de coincidir.

El problema més conegut de coincidències és el **problema dels aniversaris**. L'objectiu d'aquest problema és determinar la probabilitat que hi ha en un grup de *n* persones que almenys dues coincideixin amb la data de naixement (s'entén dia i mes), tenint en compte que l'any té sempre 365 dies.

Pensem en una classe de 20 alumnes. A priori pensaríem que la probabilitat de coincidir dues persones ha de ser molt baixa, al cap i a la fi, l'any té 365 dies i a la classe només hi ha 20 alumnes. Com hem fet abans, la forma més ràpida de resoldre el problema és calcular la probabilitat complementària, és a dir, no hi ha cap coincidència, tots han nascut en diferents dies de l'any.

Anem a trobar les possibilitat que té cadascun dels alumnes:

- la probabilitat que un alumne hagi nascut un dia qualsevol de l'any és 365 entre 365 dies que té l'any, per tant: $\frac{365}{365}$,
- la probabilitat que un altre alumne hagi nascut un dia qualsevol però diferent a l'anterior alumne és: $\frac{364}{365}$ (ara només hi ha 364 dies disponibles, l'altre és l'aniversari del primer alumne),
- per a un tercer alumne, queden disponibles 363 dies dels 365 que un any.

I així ho podem anar fent successivament. Per a cada alumne tenim:

$$\frac{365}{365}, \frac{364}{365}, \frac{363}{365}, \frac{362}{365}, \frac{361}{365}, \ldots, \frac{348}{365}, \frac{347}{365}, \frac{346}{365}.$$

Donat que podem assumir que els alumnes són independents els uns dels altres (no hi ha bessons a classe), aleshores la probabilitat de cap coincidència a classe és:

$$\text{P(Cap coincidència)} = \frac{365}{365} \text{ x } \frac{364}{365} \text{ x } \frac{363}{365} \text{ x } \frac{362}{365} \text{ x } \frac{361}{365} \text{ x } \ldots \text{ x } \frac{348}{365} \text{ x } \frac{347}{365} \text{ x } \frac{346}{365} = 0{,}58856.$$

I per tant, la probabilitat que hi hagin almenys dos alumnes amb la mateixa data de naixement és:

P(Alguna coincidència) = 1 - 0,58856 = 0,41144

Com veieu, no és tant petita com podíem esperar a priori.

Aplicant el mateix raonament anterior, si la classe fos de 50 persones, la probabilitat de cap coincidència seria:

P(Cap coincidència) = 0,02962.

I per tant, P(Alguna coincidència) = 1 - 0,02962 = 0,97038.

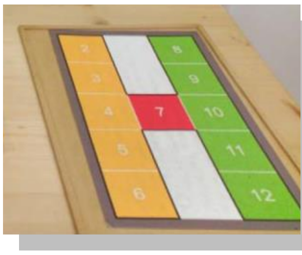
Així arribem a la conclusió que per a grups en on *n* és igual o més gran que 50, la probabilitat de tenir almenys una coincidència és pràcticament 1.

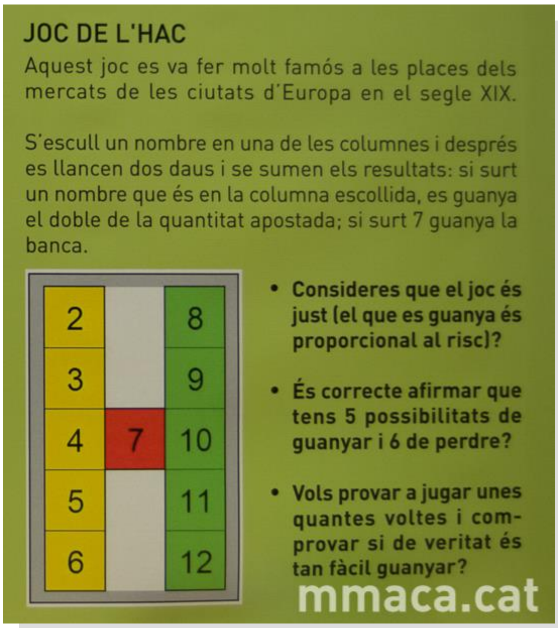
Aplicacions

Les aplicacions més lligades amb els jocs de trobar coincidències són els jocs d'atzar. Per exemple, en la grossa de Nadal, quina és la probabilitat que ens toqui? Si hem comprat un número de la grossa de Nadal tenim una probabilitat entre 100.000, per tant, una probabilitat de 0,00001.

Un altre exemple és la primitiva o la 6/49. Aquí, en comptes de 15 forats, tenim 49 caselles i, enlloc de 8 "ous" tenim que triar 6 caselles totes elles diferents. Seguint el mateix raonament que hem vist abans podem trobar quina és la probabilitat de guanyar la primitiva.

5 Joc de l'hac





Conceptes relacionats
Amb aquest element volem il·lustrar que segons el número que escollim tenim més possibilitats de guanyar i que l'esperança del joc no és zero degut al rol de la banca.

Funcionament general
S'ensenya un cartó (en forma de H). El nen o nena ha d'escollir una columna (o un número en funció del joc), es tiren dos daus i **se sumen els resultats**. Guanya el participant on la suma coincideix amb algun número de la columna escollida. Quina opció és millor? Se'ls fa reflexionar si es tracta d'un joc just o no.

Activitat associada: Quin és el teu número de la sort?

Temps requerit: 5 minuts.
Nombre de participants: 2 o més.
Edat mínima: 8 anys.

Es fan 2 grups de nens i se'ls assigna una de les dues columnes de números. Aleshores se'ls pregunta que apostin per **un número** en particular, excepte el 7 (de moment la banca no hi participa). Quin número penseu que és la millor opció? Aleshores se'ls fa que juguin una estona: van tirant els daus, observen la seva suma, i cada cop que surt el número escollit agafen una fitxa i se la queden com a premi. Per la resta de resultats, ningú es queda res. Al cap de varies tirades, els participants sumen les fitxes que ha aconseguit cada grup i corroboren (o no) si el número escollit ha sigut la millor opció.

La banca sempre guanya?

Temps requerit: 5 minuts.
Nombre de participants: 2 o més.
Edat mínima: a partir de 8 anys.

En la segona part es reparteixen les fitxes a cada grup. A cada tirada, s'aposta una fitxa per grup. Si surt del 1-6, les 2 fitxes apostades van al grup de l'esquerra, i el mateix per resultats del 8-12 pel grup de la dreta. Amb un 7, la banca guanya les dues fitxes.

Se'ls hi pregunta, és un joc just? Per què?

Comentaris

Es tracta d'un joc just en el sentit que cada grup té les mateixes probabilitats de guanyar, però és injust perquè l'esperança de cada grup és negativa (no zero). Això és degut a que la banca mai perd, ja que no arrisca res, i va acumulant les fitxes guanyades quan surt el 7.

Creieu que la banca té més probabilitat de guanyar a cada tirada? En realitat no. El 7 sí que és més probable (6/36=0.17) que qualsevol altra número, però cada grup disposa de 5 números, on la seva probabilitat total és de (1+2+3+4+5)/36 = 15/36 = 0,42):

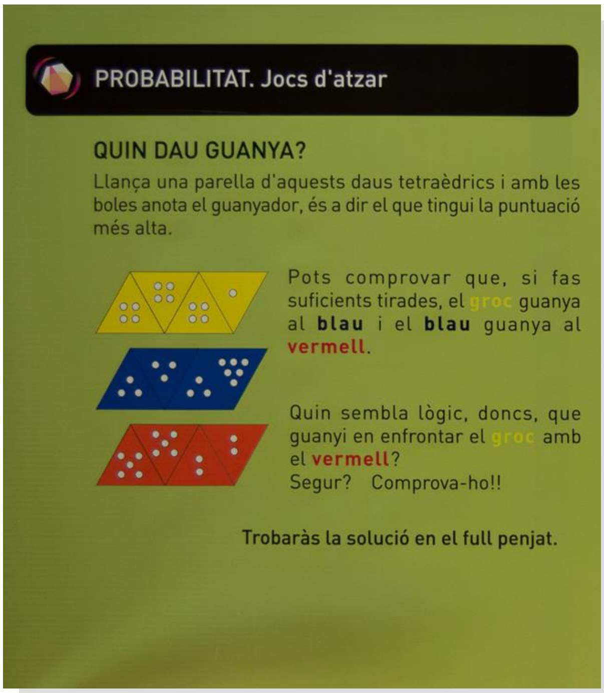
DAU 1 \ DAU 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	***7***
2	*3*	*4*	*5*	*6*	***7***	*8*
3	*4*	*5*	*6*	***7***	*8*	*9*
4	*5*	*6*	***7***	*8*	*9*	*10*
5	*6*	***7***	*8*	*9*	*10*	*11*
6	***7***	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Aleshores, no us agradaria ser la banca? Es clar que sí, ja que no arrisca res, i a la llarga, amb un número finit de fitxes, se les acabaria emportant totes.

Aplicacions

Aquest activitat es pot aplicar a molts sectors, com el bancari, els jocs d'atzar o els negocis. En el camp de la intel·ligència artificial i/o teoria de jocs es poden trobar algoritmes de decisió que permeten introduir les probabilitats de cada resultat i diferents guanys associats per calcular de manera automatitzada si ens convé o no jugar, i en cas que sí, saber quina és la millor tria. Un d'aquests algoritmes es diu ExpectMinimax, que permet representar en forma d'arbre la situació de joc en la que intervé l'atzar.

6 Quin dau guanya?



Conceptes relacionats

Amb aquest element volem il·lustrar que la relació entre els daus utilitzats no és **transitiva**. És a dir, si un dau **groc** guanya al **blau**, i aquest blau guanya al **vermell**, no implica que el vermell guanyi al groc. Per tant, no hi ha un dau que guanyi a tots.

Funcionament general
Mitjançant tres daus de quatre cares (tetraèdrics), observarem que no existeix un dau guanyador global, si no que dependrà del dau de l'adversari.

Activitat associada: La victòria per un de tres.

Temps requerit: 15 minuts.
Nombre de participants: A partir de 2.
Edat mínima: 8 anys.

Es fan 3 grups perquè competeixin de dos en dos:
- Blau vs. groc,
- vermell vs. blau,
- groc vs. vermell.

Qui tregui una puntuació més alta guanya. Abans de començar, però, se'ls pregunta: quin creieu que serà el millor dau?

Cada parella va anotant les vegades que guanya. S'observarà que depenent de contra qui es competeixi, un color té avantatge sobre un altre, però no hi ha un color guanyador global.

Comentaris

Per entendre perquè passa això, podem representar en forma de taula les diferents situacions:

		Groc			
		1	4	4	4
Blau	3	B	G	G	G
	3	B	G	G	G
	3	B	G	G	G
	6	B	B	B	B

		Blau			
		3	3	3	6
Vermell	2	B	B	B	B
	2	B	B	B	B
	5	V	V	V	B
	5	V	V	V	B

		Vermell			
		2	2	5	5
Groc	1	V	V	V	V
	4	G	G	V	V
	4	G	G	V	V
	4	G	G	V	V

Quan el dau blau competeix amb el groc, la probabilitat que guanyi el blau és de 7/16, i que guanyi el groc és de 9/16. Per tant, és més probable que guanyi el **groc**.

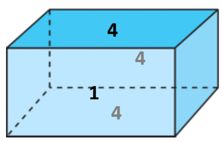
En canvi, el **blau** té una probabilitat més alta de guanyar quan competeix amb el vermell (10/16 vs 6/16). I quan el vermell competeix amb el groc, el **vermell** té una probabilitat més alta de guanyar (10/16 vs 6/16).

Així, veiem que, per una qüestió de probabilitats, tot i que el groc tendeix a guanyar al blau, i el blau al vermell, això no implica que el groc tendeixi a guanyar al vermell (relació no transitiva). És una situació semblant a la del joc pedra-paper-tisores.

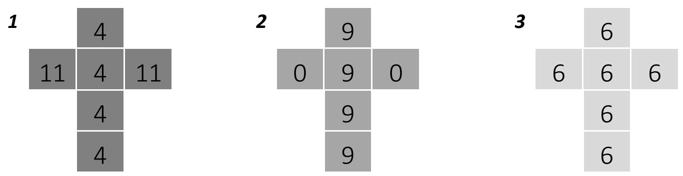
D'altra banda, si el dau contrincant fos escollit a l'atzar, és interessant tenir en compte que la opció més favorable seria escollir el dau blau, doncs en global la seva probabilitat de guanyar és de $(1/2) \cdot (7/16 + 10/16) = 17/32$, envers 16/32 i 15/32 corresponents al vermell i groc respectivament.

Altres daus:

Si no es disposa de daus tetraèdrics, es podrien construir daus en forma de prisma quadrangular per tal d'obtenir daus amb 4 cares si descartem les bases:



També es podria fer el joc amb un dau amb més de 4 cares. Per exemple, els següents daus de 6 cares permetrien realitzar el mateix procediment[4]:



En aquest cas, semblaria que intuïtivament el dau 2 fos un clar guanyador, independentment del dau contrincant, però no és així. Veiem-ho:

1 (files) vs **2** (columnes)

	0	0	9	9	9	9
4	1	1	2	2	2	2
4	1	1	2	2	2	2
4	1	1	2	2	2	2
4	1	1	2	2	2	2
11	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1

2 (files) vs **3** (columnes)

	6	6	6	6	6	6
0	3	3	3	3	3	3
0	3	3	3	3	3	3
9	2	2	2	2	2	2
9	2	2	2	2	2	2
9	2	2	2	2	2	2
9	2	2	2	2	2	2

3 (files) vs **1** (columnes)

	4	4	4	4	11	11
6	3	3	3	3	1	1
6	3	3	3	3	1	1
6	3	3	3	3	1	1
6	3	3	3	3	1	1
6	3	3	3	3	1	1
6	3	3	3	3	1	1

Prob. que guanyi 1:	**20/36**	--	12/36
Prob. que guanyi 2:	16/36	**24/36**	--
Prob. que guanyi 3:	--	12/36	**24/36**

Aplicacions

Hi ha situacions, com per exemple el joc de pedra-paper-tisora on succeeix una situació semblant. Cap opció és millor que l'altra.

En el camp del Marketing és habitual trobar relacions **no transitives**. Per exemple, en una població de 3 persones, pot ser que la majoria prefereixen el producte A al producte B; que la majoria prefereixen el producte B al producte C; i que la majoria prefereixen el producte C al producte D. Malgrat això, pot passar que la majoria prefereixen el producte D al A! Per comprovar-ho, observa la següent taula:

	1a preferència	*2a preferència*	*3a preferència*	*4a preferència*
Persona 1	Producte A	Producte B	Producte C	Producte D
Persona 2	Producte C	Producte D	Producte A	Producte B
Persona 3	Producte D	Producte A	Producte B	Producte C

[4] https://www.gaussianos.com/dados-no-transitivos.

7 Mors tua, vita mea

Conceptes relacionats

S'introdueixen els conceptes de fenomen aleatori i esperança d'una variable aleatòria.

Funcionament

Al inici del joc, es disposen de 8 fitxes vermelles i 4 verdes. Cada participant ha de tirar dos daus de 6 cares alhora. Un dau té la meitat de cares amb el símbol "+" i l'altra meitat té "-", i l'altre dau té la meitat de cares vermelles i l'altra meitat té cares verdes.

Activitats associades: Quin color prevaldrà?

Temps requerit: 5 minuts.
Nombre de participants: 1 o 2 participants. Si són 2 participants, cadascun pot escollir un color abans de començar l'activitat i veure qui guanya.
Edat mínima: 8 anys.

Els participants decideixen amb quin color volen anar. S'han de posar les 8 fitxes **vermelles** sobre el tauler esquerre i les 4 fitxes **verdes** sobre el tauler dret. Cada participant tira els dos daus alhora i segueix les instruccions següents.

+	VERMELL	ENTRA 1 FITXA VERMELLA
+	VERD	ENTRA 2 FITXES VERDES
-	VERMELL	TREU 1 FITXA VERMELLA
-	VERD	TREU 1 FITXA VERDA

El joc s'acaba quan tot el tauler s'ha omplert i guanya el color que té més fitxes.

Quin color serà millor, el vermell que comença amb més fitxes, o el verd? Discutiu els resultats.

Comentaris

En aquest cas concret, amb un tauler de 20 peces, el color verd té un cert avantatge. El motiu és que la probabilitat d'incrementar o decréixer el número de peces **vermelles** al llarg de les tirades és la mateixa (tenim ¼ d'incrementar en 1 unitat; ¼ de decréixer en una unitat; i ½ de que no canviï). Per tant, al final del joc **esperem** que hi hagi el mateix nombre de peces vermelles que al principi del joc.

D'altra banda, amb les fitxes **verdes** tenim ¼ d'incrementar en **2 unitats**; ¼ de decréixer en una unitat; i ½ de que no canviï. Així, de cada 4 tirades, **esperem** que en 2 ens quedem igual, en 1 guanyem 2 i en 1 perdem 1; és adir, **esperem guanyar** 1 fitxa verda cada quatre tirades.

Això no vol dir que sempre que acabi el guanyaran les fitxes verdes, ja que es tracta d'un **fenomen aleatori** del qual en desconeixem el resultat final. No obstant, sí que podem conèixer el **valor esperat (guany)** de fitxes de cada color per esbrinar quin color té més avantatge.

Aplicacions

Es pot aplicar a la biologia de poblacions per:

- Comprendre i analitzar els canvis en el nombre d'individus de les poblacions.
- Entendre quins factors i processos limiten i regulen el nombre d'individus i la composició genètica de les poblacions al llarg del temps.
- Estudiar l'estructura poblacional, els factors i processos que tenen una influència significativa en la mida de les poblacions i que determinen les seves fluctuacions al llarg del temps, la seva variabilitat genètica i la seva ocupació de l'espai.

Per a assolir aquests objectius cal acompanyar els coneixements de biologia amb tècniques estadístiques com són: (1) tècniques de mostreig per determinar l'abundància i la densitat; (2) models de creixement de les poblacions sense i amb estructura demogràfica; (3) estudi dels factors que limiten i regulen la grandària de les poblacions; (4) estocasticitat i probabilitat d'extinció; (5) patró espacial d'ocupació; (6) metapoblacions, models senzills i models espacialment explícits; (7) variacions en la composició genètica de les poblacions; i (8) interacció entre poblacions de diferents espècies, competència, depredació.

Bibliografia

- Blastland, M. i Dilnot, A. (2009). El tigre que no está: Un paseo por la jungla de la estadística. Ed. Turner publicaciones. ISBN-10: 8475068723.
- Brasó, Enric. (2015). Els mòduls de probabilitat i estadística del MMACA. NouBiaix, 37. El racó del MMACA (p. 97-103). Enllaç: https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/302385/392063